平成 17 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 自然・生物・生物資源・社会工・情報・医学類 (数学 III・C) 1 2 3 必答．
  4 5 6 7 から 2 題選択
- 工学システム・工学基礎学類 (数学 III・C) 1 2 3 必答．
  4 5 6 7 から 1 題選択．
- 人間学類 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択，4 5 6 7 から 2 題選択
- 国際総合・図書館情報専門学類 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択．
  4 5 6 7 から 2 題選択．

1 次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ一つ存在するように，定数 a の値を定めよ．

$$f(x) = ax + \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt\right)^4$$

2 曲線 $C : y = \sin x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．C 上の点 P における C の法線を l とする．

(1) 法線 l が点 $(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ一つ存在することを示せ．

(2) (1) の条件を満たす点 P に対し，直線 l，曲線 C，直線 $y = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 l，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の大小を比較せよ．

3 曲線 $C : y = e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す．さらに，$r(a) = \displaystyle\lim_{t\to a} L_a(t)$ と定義する．

(1) $r(a)$ を求めよ．

(2) a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ 2 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) P が逆行列をもたなければ $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる k が存在するか，または $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

(2) 条件 $A^2=O$，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 A が存在するとき，P は逆行列をもつことを示せ．

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき $A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような p，q，r を 1 組求め，$P^{-1}AP$ を計算せよ．

$\boxed{5}$ 実数 a に対して，曲線 C_a を方程式

$$(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$$

によって定める．

(1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ．

(2) a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ．

$\boxed{6}$ 30 人のクラスにおいて 2 回試験を行ったところ 2 回とも全員が受験し，得点の平均値と分散について，以下の表のような結果を得た．2 回全体の得点の分散は 44 であり，1 回目と 2 回目の得点の共分散は 20 であった．

	平均値	分散
1 回目	62	36
2 回目	60	
全体		44

(1) 2 回目の試験の得点の分散を求めよ．

(2) 1 回目と 2 回目の試験の得点の相関係数を求めよ．

(3) 3 回目の試験を行ったところ 24 人が受験し，平均値 54，分散 51 であった．3 回全体の得点の分散を求めよ．

7 正の整数 N に対して，$a^2 \leqq N < (a+1)^2$ である正の整数 a と $b = N - a^2$ によって，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_0 = a$$
$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n + a}$$

で定義する．

(1) N，a を入力して x_0，x_1，x_2，$\ldots$ を計算し，$|{x_n}^2 - N| < 0.0001$ となったとき x_n の値を出力して終了するプログラムを書け．ただし，BASIC では $|x|$ は ABS(x) で求められる．

(2) $x_{n+1} - \sqrt{N} = \dfrac{a - \sqrt{N}}{x_n + a}\left(x_n - \sqrt{N}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が成り立つことを示せ．

(3) $b > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$x_0 < x_2 < \cdots < x_{2k} < \sqrt{N} < x_{2k+1} < \cdots < x_3 < x_1$$

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{N}$ を示せ．

解答例

$\boxed{1}$ $k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$ とおくと　$f(x)=ax+\dfrac{1}{4}k^4$

$$\begin{aligned}
k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(at+\frac{1}{4}k^4\right)\sin t\,dt\\
&= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt+\frac{1}{4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\\
&= a\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}k^4\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a+\frac{1}{4}k^4
\end{aligned}$$

$a=-\dfrac{1}{4}k^4+k$ より，$g(k)=-\dfrac{1}{4}k^4+k$ とおくと

$$g'(k)=-k^3+1=(1-k)(k^2+k+1)$$

k	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(k)$	$+$	0	$-$
$g(k)$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$

$f(x)$ がただ 1 つ存在するから，$a=g(k)$ をみたす a はただ 1 つである．

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$　■

2 (1) $y=\sin x$ より　$y'=\cos x$

$C: y=\sin x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における法線 l の方程式は

$$y-\sin t=-\frac{1}{\cos t}(x-t)$$

これが点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通るから

$$1-\sin t=\frac{t}{\cos t}\quad \text{ゆえに}\quad \sin t\cos t-\cos t+t=0$$

$f(t)=\sin t\cos t-\cos t+t$ とおくと $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f'(t)&=\cos^2 t-\sin^2 t+\sin t+1\\ &=-2\sin^2 t+\sin t+2\\ &=-2\left(\sin t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}\end{aligned}$$

$0<\sin t<1$ より，$f'(t)>0$ であるから，$f(t)$ は単調増加．

$$\lim_{t\to+0}f(t)=-1<0,\quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}f(t)=\frac{\pi}{2}>0$$

したがって，$f(t)=0$ を満たす t がただ 1 つ存在する．

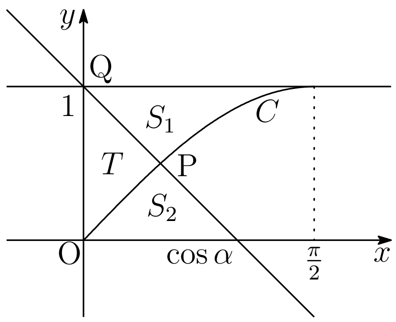
よって，条件を満たす点 P がただ 1 つ存在する．

(2) $f(t)=0$ の解を α とすると，l は傾き $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$，y 切片 1 の直線であるから

$$l: y=-\frac{x}{\cos\alpha}+1$$

l の x 切片は　$\cos\alpha$

直線 l，曲線 C，y 軸で囲まれた部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned} T+S_2&=\frac{1}{2}\cos\alpha\\ T+S_1&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

上の 2 式から　$S_1-S_2=\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(\pi-2-\cos\alpha)>0$

よって　　$\boldsymbol{S_1>S_2}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=e^x$ とする．$C: y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線の方程式は，それぞれ

$$(*)\begin{cases} x-a+f'(a)(y-f(a))=0, \\ x-t+f'(t)(y-f(t))=0 \end{cases}$$

Q は連立方程式 $(*)$ の解である．上の 2 式から

$$\begin{aligned} y\{f'(t)-f'(a)\} &= t-a+f(t)f'(t)-f(a)f'(a) \\ &= t-a+f'(t)\{f(t)-f(a)\}+f(a)\{f'(t)-f'(a)\} \end{aligned}$$

$t \neq a$ であるから，両辺を $t-a$ で割ると

$$\frac{f'(t)-f'(a)}{t-a}y = 1+f'(t)\cdot\frac{f(t)-f(a)}{t-a}+f(a)\cdot\frac{f'(t)-f'(a)}{t-a}$$

$t \to a$ とすると　$f''(a)y = 1+f'(a)^2+f(a)f''(a)$

$f''(a) \neq 0$ に注意して　$y-f(a)=\dfrac{1+f'(a)^2}{f''(a)}$

上式および $(*)$ の第 1 式から

$$\begin{aligned} (x-a)^2+\{y-f(a)\}^2 &= f'(a)^2\{y-f(a)\}^2+\{y-f(a)\}^2 \\ &= \{1+f'(a)^2\}\{y-f(a)\}^2 = \frac{\{1+f'(a)^2\}^3}{f''(a)^2} \end{aligned}$$

$f'(a)=e^a$，$f''(a)=e^a$ であるから [1]

$$r(a)=\frac{\{1+f'(a)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(a)} = \boldsymbol{\frac{(1+e^{2a})^{\frac{3}{2}}}{e^a}}$$

(2) (1) の結果から　$r(a)=\left(\dfrac{1+e^{2a}}{e^{\frac{2}{3}a}}\right)^{\frac{3}{2}} = (e^{-\frac{2}{3}a}+e^{\frac{4}{3}a})^{\frac{3}{2}}$

3 正数 $\dfrac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}$，$\dfrac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}$，$e^{\frac{4}{3}a}$ の相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}+\frac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}+e^{\frac{4}{3}a} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}\cdot\frac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}\cdot e^{\frac{4}{3}a}} = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

上式で等号が成立するとき

$$\frac{e^{-\frac{2}{3}a}}{2}=e^{\frac{4}{3}a} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}=e^{2a} \quad \text{すなわち} \quad a=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

したがって　$r(a) \geqq \left(\dfrac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (pp.8-10 を参照)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，題意は成立する．

(2) P が逆行列をもたないと仮定すると，$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトル (固有値は 0 でない) であるから

$$A^2\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは $A^2=O$ に矛盾する．よって，P は逆行列をもつ．

(3) $A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$，$A^2=O$ より　$A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AP=\begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ および P は正則であるから

$$P^{-1}AP=\frac{1}{p-qr}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

解説 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \quad \cdots(*)$$

i) $(*)$ が異なる2つの解 (固有値)α，β をもつとき，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると [2]($\alpha\neq\beta$ より $\vec{u}\not\parallel\vec{v}$)

$$A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ とおくと ($\vec{u}\not\parallel\vec{v}$ より $\det P\neq 0$)

$$AP=PU \quad \text{ゆえに} \quad A=PUP^{-1}$$

$A^n=(PUP^{-1})^n=PU^nP^{-1}$ であるから

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

ii) $(*)$ が重解 α をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルでない任意のベクトル $\vec{v}\neq\vec{0}$ に対して

$$\vec{u}=(A-\alpha E)\vec{v} \quad \cdots ①$$

とおくと，$(A-\alpha E)^2=O$ であるから

$$\begin{aligned} A\vec{u}&=A(A-\alpha E)\vec{v} \\ &=\{(A-\alpha E)^2+\alpha(A-\alpha E)\}\vec{v} \\ &=\alpha(A-\alpha E)\vec{v}=\alpha\vec{u} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② から $\quad A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \vec{u}+\alpha\vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと，i) と同様にして

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & n\cdot\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

5 (1) $C_a : (x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$ を a について整理すると

$$(y^2 - 2x - 3)a + x^2 - 1 = 0 \qquad (*)$$

a の値に関係なく成り立つ $(x,\ y)$ は

$$y^2 - 2x - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0$$

これを解いて **$(\pm 1,\ \pm\sqrt{5})$ 複号任意**

(2) (i) $y^2 - 2x - 3 = 0$ のとき，(1) で求めた 4 点

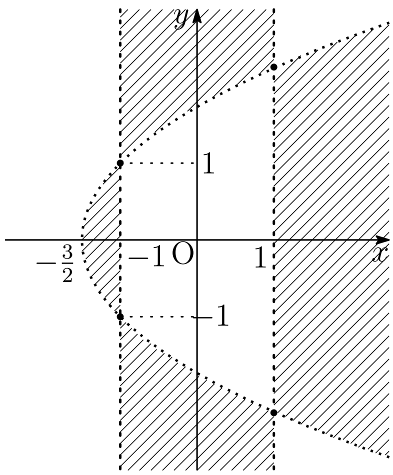
(ii) $y^2 - 2x - 3 \neq 0$ のとき，$(*)$ より

$$a = \frac{1 - x^2}{y^2 - 2x - 3}$$

$a > 0$ であるから

$$(1 - x^2)(y^2 - 2x - 3) > 0$$

求める領域は，下の図の斜線部分である．ただし，黒丸以外の境界線を含まない．



6 (1) 1 回目，2 回目のデータをそれぞれ X, Y とする

$E(X)=62$，$V(X)=36$ を $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ に代入すると

$$36=E(X^2)-62^2 \quad ゆえに \quad E(X^2)=36+62^2=3880$$

全体の平均は $\dfrac{30E(X)+30E(Y)}{30+30}=\dfrac{E(X)+E(Y)}{2}=\dfrac{62+60}{2}=61$

全体の分散が 44 であるから

$$\frac{1}{60}\{30E(X^2)+30E(Y^2)\}-61^2=44$$
$$\frac{1}{2}E(X^2)+\frac{1}{2}E(Y^2)-61^2=44$$
$$\frac{1}{2}\cdot 3880+\frac{1}{2}E(Y^2)-3721=44$$
$$E(Y^2)=3650$$

よって，2 回目の分散は

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=3650-60^2=\mathbf{50}$$

(2) 1 回目と 2 回目の共分散 s_{xy} が 20 であるから，相関係数 r は

$$r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{20}{\sqrt{36}\sqrt{50}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

(3) 3 回目のデータを Z とする．

$E(Z)=54$，V(Z)=51 を $V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$ に代入すると

$$51=E(Z^2)-54^2 \quad ゆえに \quad E(Z^2)=2967$$

3 回全体の平均を E とすると

$$E=\frac{30E(X)+30E(Y)+24E(Z)}{30+30+24}$$
$$=\frac{5E(X)+5E(Y)+4E(Z)}{14}=\frac{5\cdot 62+5\cdot 60+4\cdot 54}{14}=59$$

3 回全体の分散を V とすると

$$V=\frac{30E(X^2)+30E(Y^2)+24E(Z^2)}{30+30+24}-59^2$$
$$=\frac{5E(X^2)+5E(Y^2)+4E(Z^2)}{14}-59^2$$
$$=\frac{5\cdot 3880+5\cdot 3650+4\cdot 2967}{14}-3481=\mathbf{56}$$

■

$\boxed{7}$ (1)

```
10 INPUT "N";N
20 INPUT "A";A
30 B=N-A^2
40 X=A
50 IF ABS(X^2-N)<0.0001 THEN 80
60 X=A+B/(X+A)
70 GOTO 50
80 PRINT X
90 END
```

(2) $(*)$ $x_{n+1} = a + \dfrac{b}{x_n + a}$, $b = N - a^2$ より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{N} &= a - \sqrt{N} + \frac{N - a^2}{x_n + a} \\ &= \frac{(a - \sqrt{N})(x_n + a) + N - a^2}{x_n + a} \\ &= \frac{(a - \sqrt{N})\{(x_n - \sqrt{N}) + (a + \sqrt{N})\} + N - a^2}{x_n + a} \\ &= \frac{a - \sqrt{N}}{x_n + a}(x_n - \sqrt{N}) \qquad (**) \end{aligned}$$

(3) $x_0 = a > 0$，$(*)$ より，$x_n > 0$

正の整数 N, a に対して，$a^2 \leqq N < (a+1)^2$ であるから，

$b > 0$ のとき，$b = N - a^2 > 0$　ゆえに　$a < \sqrt{N} < a+1$

$$x_0 - \sqrt{N} = a - \sqrt{N} < 0$$
$$x_1 - \sqrt{N} = \frac{a-\sqrt{N}}{x_0+a}(x_0 - \sqrt{N}) = \frac{(a-\sqrt{N})^2}{2a} > 0$$

ゆえに　$x_0 < \sqrt{N} < x_1 \quad \cdots ①$

$(**)$ より　$\dfrac{x_{n+1}-\sqrt{N}}{x_n-\sqrt{N}} = \dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}$，$\dfrac{x_{n+2}-\sqrt{N}}{x_{n+1}-\sqrt{N}} = \dfrac{a-\sqrt{N}}{x_{n+1}+a}$，

上の 2 式の辺々を掛けると

$$\frac{x_{n+2}-\sqrt{N}}{x_n-\sqrt{N}} = \frac{(a-\sqrt{N})^2}{(x_n+a)(x_{n+1}+a)}$$

このとき，$x_n > 0$，$a > 0$ であるから

$$0 < \frac{(a-\sqrt{N})^2}{(x_n+a)(x_{n+1}+a)} = \frac{(a-\sqrt{N})^2}{a^2} = \left(1 - \frac{\sqrt{N}}{a}\right)^2 < 1$$

したがって　$0 < \dfrac{x_{n+2}-\sqrt{N}}{x_n-\sqrt{N}} < 1 \quad \cdots (***)$

$(***)$ より

$$0 < \frac{\sqrt{N}-x_{2k}}{\sqrt{N}-x_{2k-2}} < \cdots < \frac{\sqrt{N}-x_2}{\sqrt{N}-x_0} < 1$$
$$0 < \frac{x_{2k+1}-\sqrt{N}}{x_{2k-1}-\sqrt{N}} < \cdots < \frac{x_2-\sqrt{N}}{x_0-\sqrt{N}} < 1$$

① より，$\sqrt{N} - x_0 > 0$，$x_1 - \sqrt{N} > 0$ であるから，上式より

$$0 < \sqrt{N} - x_{2k} < \sqrt{N} - x_{2k-2} < \cdots < \sqrt{N} - x_0$$
$$0 < x_{2k+1} - \sqrt{N} < x_{2k-1} - \sqrt{N} < \cdots < x_1 - \sqrt{N}$$

よって，次の不等式が成立する．

$$x_0 < x_2 < \cdots < x_{2k} < \sqrt{N} < x_{2k+1} < \cdots < x_3 < x_1$$

(4) (**) より $|x_{n+1}-\sqrt{N}|=\left|\dfrac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}\right||x_n-\sqrt{N}|$

$x_n \geqq x_0 = a$，$\sqrt{N} < a+1$ であるから (a は整数)

$$\left|\frac{a-\sqrt{N}}{x_n+a}\right| < \frac{\sqrt{N}-a}{2a} < \frac{(a+1)-a}{2a} = \frac{1}{2a} \leqq \frac{1}{2}$$

したがって $|x_{n+1}-\sqrt{N}| < \dfrac{1}{2}|x_n-\sqrt{N}|$

$$|x_n-\sqrt{N}| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0-\sqrt{N}| = \frac{|a-\sqrt{N}|}{2^n}$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{N}|=0$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{N}$ ■