平成16年度　筑波大学　２次試験前期日程(数学問題)120分

- 自然・生物・生物資源・社会工・情報・医学類(数学 III・C) 1 2 3 必答．4 5 6 7 から2題選択
- 工学システム(数学 III·C) 1 2 3 必答．4 5 6 7 から1題選択．90分
- 工学基礎学類(数学 III・C) 1 2 必答．4 5 6 7 から1題選択．
- 人間学類(数学 III・C) 1 2 3 から2題選択または 4 5 6 7 から2題選択
- 国際総合・図書館情報専門学類(数学 III・C) 1 2 3 から2題選択．4 5 6 7 から2題選択．

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log|x|}{x} & (|x| > 1) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (|x| \leqq 1) \end{cases}$$

と定める．ただし，a，b，c，d は定数とし，$f(x)$ は $x = \pm 1$ において微分可能とする．なお，log は $e = 2.718\cdots$ を底とする自然対数である．

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

2 $f(x) = \sin^3 x$ とする．

(1) $f'(0)$ および $f'(2\pi)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $p(x)$ を x の2次式とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx = 0$ を示せ．

3 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ を満たすとする．$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を $X(t)$，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(t)$ とで囲まれる図形を y 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする．また，$X(0)=Y(0)=0$ とする．このとき，次を示せ．

(1) $X'(t)=\pi f(t)^2,\ Y'(t)=\pi t^2 f'(t)\ (t>0)$ である．

(2) $f(x)$ が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ が成り立つならば，$f(x)=x\ (x \geqq 0)$ である．

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)\ (t \geqq 0)$ である．

4 2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$X^2+aX+bE=O$$

を満たすとする．ただし，x，y，z，w，a，b は実数，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $x+w \neq -a$ のとき，$a^2-4b>0$ であることを示し，a，b を用いて X を表せ．

(2) $a^2-4b \leqq 0$ のとき，$yz \leqq 0$ を示せ．

5 楕(だ)円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x \geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,-1)$ との距離が最大となる点を P とする．

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする．△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および △APQ の面積を求めよ．

6 $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ および $Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_n$ は，それぞれ区間 $[0,\ 1]$ で等確率でかつ独立に発生させた乱数である．各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について，$(X_i,\ Y_i)$ から Z_i を次のように定義する．

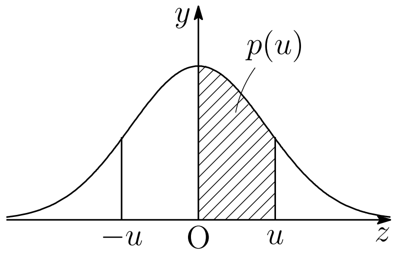
$$Z_i = \begin{cases} 1 & (X_i{}^2 + Y_i{}^2 \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(Z_i = 1)$ を求めよ．

(2) $W_k = \dfrac{4}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$ とするとき，W_n の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) W_n は正規分布で近似できるとし，$n = 10^m$ (m は正の整数) とする．W_n の値が 95%の確率で区間 $(\mu - 0.0034,\ \mu + 0.0034)$ に入る m の最小値を求めよ．

正 規 分 布 表



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

7 実数 $A,\ B,\ C$ が与えられたとき，$a_0 = A$，$b_0 = B$，$c_0 = C$ とおいて，$n = 0, 1, 2, \ldots$ について $a_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{2}$，$b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$，$c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とする．

(1) A，B，C を読み込み，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ を $n = 20$ まで生成し，印刷していくプログラムを書け．

(2) $a_n + b_n + c_n = A + B + C$ を示せ．

(3) $2a_n - b_n - c_n$ を $A,\ B,\ C$ および n で表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log|x|}{x} & (|x|>1)\\ ax^3+bx^2+cx+d & (|x|\leqq 1)\end{cases}$ より

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\log|x|}{x^2} & (|x|>1)\\ 3ax^2+2bx+c & (|x|<1)\end{cases}$$

$x=1$ で微分可能であるから

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x),\quad \lim_{x\to 1-0}f'(x)=\lim_{x\to 1+0}f'(x)$$

ゆえに　$a+b+c+d=0,\quad 3a+2b+c=1$

$x=-1$ で微分可能であるから

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}f(x),\quad \lim_{x\to -1+0}f'(x)=\lim_{x\to -1-0}f'(x)$$

ゆえに　$-a+b-c+d=0,\quad 3a-2b+c=1$

上の諸式から　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ b=0,\ c=-\dfrac{1}{2},\ d=0}$

(2) (1) の結果から

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log|x|}{x} & (|x|>1)\\ \dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x & (|x|\leqq 1)\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\log|x|}{x^2} & (|x|>1)\\ \dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2} & (|x|\leqq 1)\end{cases}$$

$f(x)$ は奇関数であるから，$x\geqq 0$ における増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}<\dfrac{1}{e}$ より，$f(x)$ の最大値は　$f(e)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = \sin^3 x$ より　$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

よって　　$\boldsymbol{f'(0) = 0}$，$\boldsymbol{f'(2\pi) = 0}$

(2) $f(x) = \sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} (\sin x - \cos^2 x \sin x)\,dx \\ &= \Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \Big]_0^{2\pi} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

別解　$f(x)$ は基本周期 2π の周期関数，$f(-x) = -f(x)$ である．
$x = 2\pi - t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_\pi^{0} f(2\pi - t)\,(-dt) = -\int_0^{\pi} f(t)\,dt \\ &= -\int_0^{\pi} f(x)\,dx\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_\pi^{2\pi} f(x)\,dx = 0$

よって　　$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$

(3) $p''(x)$ が定数であることと (1)，(2) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx &= \Big[p(x)f'(x) \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'(x)f'(x)\,dx \\ &= -\int_0^{2\pi} p'(x)f'(x)\,dx \\ &= -\Big[p'(x)f(x) \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} p''(x)f(x)\,dx \\ &= p''(x)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \mathbf{0}\end{aligned}$$

■

3 (1) $X(t)=\pi\int_0^t f(x)^2\,dx$ より　$X'(t)=\pi f(t)^2$

$Y(t)=\pi\int_0^{f(t)} x^2\,dy=\pi\int_0^t x^2\frac{dy}{dt}\cdot dt$ より　$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$

別解 $Y(t)=\pi t^2 f(t)-2\pi\int_0^t xf(x)\,dx$ より

$$
\begin{aligned}
Y(t)&=\pi t^2 f(t)-\pi\int_0^t (x^2)'f(x)\,dx\\
&=\pi t^2 f(t)-\pi\Big[\,x^2 f(x)\,\Big]_0^t+\pi\int_0^t x^2 f'(x)\,dx\\
&=\pi\int_0^t x^2 f'(x)\,dx
\end{aligned}
$$

よって　　$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$

(2) $X(t)=Y(t)$ より，$X'(t)=Y'(t)$ であるから

$$\pi f(t)^2=\pi t^2 f'(t)\quad ゆえに\quad -\frac{f'(t)}{f(t)^2}=-\frac{1}{t^2}$$

上の第 2 式の両辺を t で積分すると (C は積分定数)

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t}+C\quad ゆえに\quad f(t)=\frac{t}{1+Ct}$$

$f(x)$ は，整式であるから　$C=0$　よって　$f(x)=x$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$
\begin{aligned}
X(t)&=\pi\int_0^t f(x)^2\,dx=\pi\int_0^t\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx,\\
Y(t)&=\pi\int_0^t x^2 f'(x)\,dx=\int_0^t x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx=\pi\int_0^t\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

上の 2 式から　$X(t)=Y(t)$　■

$\boxed{4}$ (1) $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$X^2-(x+w)X+(\det X)E=O$$

これと等式 $X^2+aX+bE=O\cdots(*)$ から

$$(a+x+w)X=(\det X-b)E \qquad (**)$$

$x+w\neq -a$ より，$a+x+w\neq 0$ であるから，$X=kE$ (k は定数) とおいて，$(*)$ に代入すると

$$(k^2+ak+b)E=O$$

k に関する 2 次方程式 $k^2+ak+b=0$ は，実数解をもつから

$$a^2-4b>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{X=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}E}$$

(2) (1) の結果から　$x+w\neq -a \Longrightarrow a^2-4b>0$

対偶をとると　$a^2-4b\leqq 0 \Longrightarrow x+w=-a \quad \cdots①$

さらに $(**)$ より　$b=\det X=xw-yz \quad \cdots②$

①，② および $a^2-4b\leqq 0$ より

$$a^2-4b=(x+w)^2-4(xw-yz)\leqq 0$$

したがって　$4yz\leqq -(x-w)^2$　よって　$yz\leqq 0$ ■

5 (1) C 上の点 P を $(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると $(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$，A$(0,-1)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (\sqrt{3}\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 1)^2\\ &= 3\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 1\\ &= -2\sin^2\theta + 2\sin\theta + 4\\ &= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

AP を最大にする点 P は　$\sin\theta = \dfrac{1}{2},\quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$　　よって　$\mathbf{AP} = \dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

(2) Q$(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi + 1)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{APQ} &= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}(\sin\varphi + 1) - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos\varphi\right|\\ &= \frac{3}{4}|\sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi + 1| = \frac{3}{4}\left|2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + 1\right|\end{aligned}$$

$\varphi = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$\mathbf{Q}\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$　　△APQ の面積の最大値は　$\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$

別解 $(x(\theta),\ y(\theta)) = (\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると

$$(x'(\theta),\ y'(\theta)) = (-\sqrt{3}\sin\theta,\ \cos\theta)$$

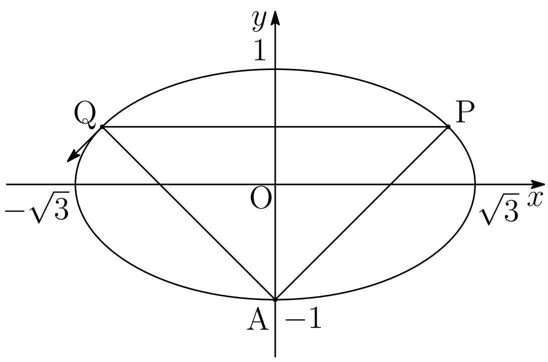
$(x'(\theta),\ y'(\theta))/\!/\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$$(-\sqrt{3}\sin\theta,\ \cos\theta)/\!/\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

△APQ の面積が最大となるとき，$y(\theta) > 0$ であるから

$$\theta = \frac{5\pi}{6}\quad \text{ゆえに}\quad \mathbf{Q}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

P，Q の y 座標が等しいから　$\triangle\mathrm{APQ} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$　■



$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $P(Z_i = 1) = \dfrac{\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2}{1\cdot 1} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(2) $Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ とすると，Z は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ に従うから

$$\mu = \frac{4}{n}E(z) = \frac{4}{n}\cdot n\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{4}{n}\right)^2 V(Z) = \frac{4^2}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi(4-\pi)}{n}}$$

(3) $u = \dfrac{W_n - \mu}{\sigma}$ とおくと，u は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

W_n が 95%の確率で区間 $(\mu - 0.0034,\ \mu + 0.0034)$ に入るとき，正規分布表により $P(|u| \leqq 1.96) = 0.95$ であるから

$$1.96 < \frac{0.0034}{\sigma} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1.96}{0.0034} < \sqrt{\frac{n}{\pi(4-\pi)}}$$

したがって

$$10^m = n > \pi(4-\pi)\left(\frac{1.96}{0.0034}\right)^2 = \left(\frac{98}{17}\right)^2 \pi(4-\pi)\cdot 10^4 \qquad (*)$$

ここで　$5.7 < \dfrac{98}{17} < 5.8$　ゆえに　$32 < \left(\dfrac{98}{17}\right)^2 < 34$

$2.4 < 3.1 \times 0.8 < \pi(4-\pi) < 3.2 \times 0.9 = 2.9$ であるから

$$76 < 32 \times 2.4 < \left(\frac{98}{17}\right)^2 < 34 \times 2.9 < 99$$

以上の結果から

$$7.6 \times 10^5 < \left(\frac{98}{17}\right)^2 \pi(4-\pi)\cdot 10^4 < 9.9 \times 10^5$$

よって，$(*)$ を満たす最小の整数 m は　**6**　■

$\boxed{7}$ (1)

```
10 DIM A(20), B(20), C(20)
20 INPUT A(0), B(0), C(0)
30 FOR N=0 TO 19
40 A(N+1)=(B(N)+C(N))/2
50 B(N+1)=(C(N)+A(N))/2
60 C(N+1)=(A(N)+B(N))/2
70 LPRINT A(N+1), B(N+1), C(N+1)
80 NEXT N
90 END
```

補足 PRINT は画面出力，LPRINT はプリンタ出力．データ数が多いと，画面出力では，データがスクロールされて，一覧表示できない場合がある．

(2) 漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{b_n + c_n}{2} + \frac{c_n + a_n}{2} + \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= a_n + b_n + c_n \end{aligned}$$

よって　$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = A + B + C$

(3) 漸化式から

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} - b_{n+1} - c_{n+1} &= (b_n + c_n) - \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(2a_n - b_n - c_n) \end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{2a_n - b_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2A - B - C)}$

(4) (1) と (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}\{(a_n + b_n + c_n) + (2a_n - b_n - c_n)\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{A + B + C + (2A - B - C)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}(A + B + C)}$ ■