

平成 15 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

- 自然・生物・生物資源・社会工・情報・医学・図書館情報専門学類
(数学 III・C) 1 2 3 必答. 4 5 6 7 から 2 題選択
- 工学システム (数学 III・C) 1 2 3 必答. 4 5 6 7 から 1 題選択.
- 工学基礎学類 (数学 III・C) 1 2 必答. 4 5 6 7 から 1 題選択. 90 分
- 人間学類 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択または 4 5 6 7 から 2 題選択
- 国際総合 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択. 4 5 6 7 から 2 題選択.

1 実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が, 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たしている.

(i) すべての x について, $f(x) > 0$ である.

(ii) すべての x, y について, $f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ.

(1) $f(0) = 1$ を示せ.

(2) $g(x) = \log f(x)$ とする. このとき, $g'(x) = f'(0) - x$ が成り立つことを示せ.

(3) $f'(0) = 2$ となるような $f(x)$ を求めよ.

2 関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ が定める曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = x$ に接している.

(1) b の値を求めよ.

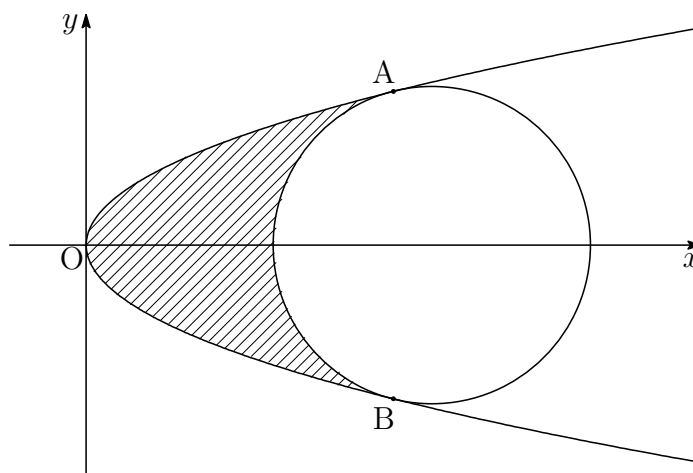
(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ が最大値と最小値を持つような a の値の範囲を求め, そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

(4) $f(x)$ が最大値を持つが最小値は持たないとき, a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ.

- 3 下の図のように、円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($r > \frac{1}{2}$) が放物線 $y^2 = x$ と 2 点 A, B で接している.

- (1) 点 A の x 座標および a を r で表せ.
- (2) 円と放物線で囲まれた部分 (斜線部分) を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする. このとき, $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3}$ を求めよ.



- 4 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{pmatrix}$ に対して, 行列 $P = A - E$ が $P^2 = P$ を満たしている. ただし, E は 2 次の単位行列とする.

- (1) a, b が満たす条件を求めよ.
- (2) A の成分がすべて整数のとき, a が満たす条件を求めよ.
- (3) $A^{-1} = sP + tE$ を満たす実数 s, t を求めよ.

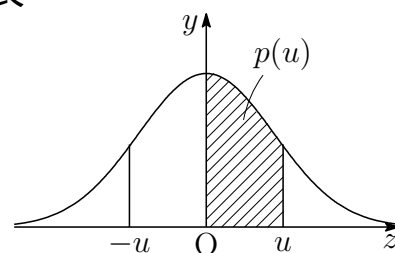
- 5 2 点 $(0, 1), (0, -1)$ を焦点とする双曲線 C_1 と 2 点 $(1, 0), (-1, 0)$ を焦点とする楕円 C_2 は, 2 点 $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ のみを共有している.

- (1) C_1 と C_2 の方程式を, それぞれ求めよ.
- (2) C_1 と漸近線を共有し, C_1 と異なる双曲線を C_3 とする. C_2 と C_3 が 2 点のみを共有するとき, C_3 の方程式を求めよ.

6 A 大学の入学試験では、1200 人の入学定員に対して 4540 人の受験生があった。入学試験問題は 800 点満点で、受験者全体の成績の分布は、平均点 395 点、標準偏差 130 点の正規分布とみなしてよいとする。このとき、合格者数を 1200 人として、次の問いに答えよ。ただし、必要があれば次頁の正規分布表を用いてよい。また、試験の成績は整数値とする。

- (1) B 君が自己採点をしたところ 616 点であった。B 君は上位何パーセント以内に入ると予想されるか、小数第 1 位未満を四捨五入して答えよ。
- (2) 合格するには少なくとも何点以上の成績であればよいか。
- (3) C 高校からの受験者 300 人の成績の分布は、平均 463 点、標準偏差 100 点の正規分布とみなしてよいとする。この 300 人の何パーセントが合格できると予想されるか。小数第 1 位未満を四捨五入して答えよ。

正 規 分 布 表



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

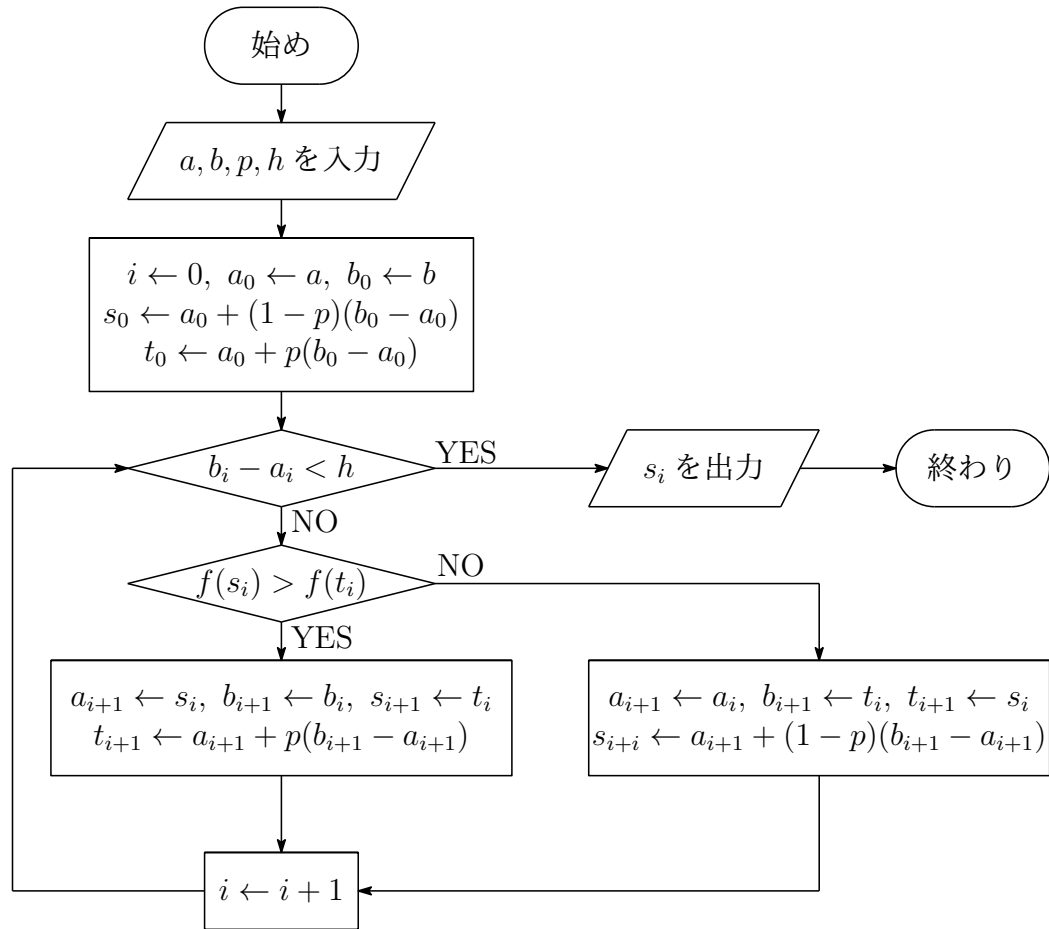
- 7 関数 $f(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ であるとする (ただし, $a < b$). さらに, $f(x)$ は $a < d < b$ を満たす点 $x = d$ で最小値をとり,

$$\begin{aligned} a < x_1 < x_2 < d & \text{ならば} & f(x_1) > f(x_2) \\ d < x_1 < x_2 < b & \text{ならば} & f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

とする. 区間の幅を縮小させながら d の値を近似的に計算する. $a < s < t < b$ を満たす s と t に対し,

$$\begin{aligned} f(s) > f(t) & \text{ならば} & s < d < b \\ f(s) \leq f(t) & \text{ならば} & a < d \leq t \end{aligned}$$

であることを用い, 次のアルゴリズムを作成した. ここで, p は $\frac{1}{2} < p < 1$ を満たす定数, h は $h < b - a$ を満たす十分小さい正の定数とする.



解答例

- 1** (1) 条件 (ii) に $x = y = 0$ を代入すると $f(0) = f(0)^2$
 条件 (i) より, $f(0) > 0$ であるから $f(0) = 1$

(2) 条件 (ii) から

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f(x)f(h)e^{-xh} - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot \frac{f(h)e^{-xh} - 1}{h} \\ &= f(x) \cdot \frac{\{f(h) - 1\}e^{-xh} + e^{-xh} - 1}{h} \\ &= f(x) \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} \cdot e^{-xh} + \frac{e^{-xh} - 1}{-xh} \cdot (-x) \right\}\end{aligned}$$

上式において, $h \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0), \quad \lim_{h \rightarrow 0} e^{-xh} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-xh} - 1}{-xh} = 1$$

したがって $f'(x) = f(x)\{f'(0) - x\}$

$$g(x) = \log f(x) \text{ より } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0) - x$$

- (3) $f'(0) = 2$ より, (2) の結果から $g'(x) = 2 - x$

両辺を積分すると $g(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + C$ (C は積分定数)

$$g(0) = \log f(0) = \log 1 = 0 \text{ より } C = 0$$

したがって $\log f(x) = g(x) = 2x - \frac{x^2}{2}$ よって $f(x) = e^{2x - \frac{x^2}{2}}$ ■

- 2** (1) $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ より

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + ax + b) - x(2x + a)}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{b - x^2}{(x^2 + ax + b)^2}$$

$$f'(0) = 1 \text{ より } \frac{1}{b} = 1 \text{ よって } b = 1$$

(2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + 1}$ より

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + a + \frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + a + \frac{1}{x}} = 0$$

(3) 2次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ の判別式を D とすると $D = a^2 - 4$

(i) $D > 0$, すなわち, $a < -2$, $2 < a$ のとき, $x^2 + ax + 1 = 0$ の実数解を α, β とすると, $f(x)$ は $x = \alpha, \beta$ の前後で $f(x)$ は $+\infty, -\infty$ に発散するから, 最大値も最小値も持たない.

(ii) $D = 0$, すなわち, $a = \pm 2$ のとき

$$a = 2 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$a = -2 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

$a = 2$ のとき最小値なし. $a = -2$ のとき最大値なし.

(iii) $D < 0$, すなわち, $-2 < a < 2$ のとき

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + ax + 1)^2}$$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{a-2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{a+2}$	$\searrow$	0

(i)~(iii) より, 最大値と最小値を持つような a の値の範囲は $-2 < a < 2$

$$\text{最大値 } f(1) = \frac{1}{a+2}, \quad f(-1) = \frac{1}{a-2}$$

(4) (3) の結果から, $f(x)$ が最大値を持つが最小値を持たないのは, $a = 2$ が必要である. このとき増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

よって, 求める a の値は $a = 2$, 最大値 $f(1) = \frac{1}{4}$



3 (1) A は放物線 $y^2 = x$ 上の点であるから, $A(t^2, t)$ とおく ($t > 0$).

円 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ の中心を $C(a, 0)$ とおく.

$$y^2 = x \text{ より } 2yy' = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y' = \frac{1}{2y}$$

放物線 $y^2 = x$ 上の点 A における接線の傾きは $\frac{1}{2t}$

$\vec{v} = \left(1, \frac{1}{2t}\right)$, $\vec{CA} = (t^2 - a, t)$ について, $\vec{v} \perp \vec{CA}$ であるから

$$1(t^2 - a) + \frac{1}{2t} \cdot t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - a = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

① より, $\vec{CA} = \left(-\frac{1}{2}, t\right)$ を $|\vec{CA}|^2 = r^2$ に代入すると

$$\frac{1}{4} + t^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 = r^2 - \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

② より, 点 A の x 座標は $r^2 - \frac{1}{4}$ ①, ② から $a = r^2 + \frac{1}{4}$

(2) (1) の結果から $a - r = r^2 + \frac{1}{4} - r = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2$

また, 円の方程式 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ は

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - (x - a)^2 = r^2 - x^2 + 2ax - a^2 \\ &= r^2 - x^2 + 2\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)x - \left(r^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -x^2 + 2\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)x - \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

上式および放物線 $y^2 = x$ について

$$x - \left\{-x^2 + 2\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)x - \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)^2\right\} = \left(x - r^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{V(r)}{\pi} &= \int_0^{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2} x \, dx + \int_{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2}^{r^2 - \frac{1}{4}} \left(x - r^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_0^{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{3} \left[\left(x - r^2 + \frac{1}{4}\right)^3 \right]_{\left(r - \frac{1}{2}\right)^2}^{r^2 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(r - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{V(r)}{\pi \left(r - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{r \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{3}$$

別解 (バウムクーヘン型求積法)

放物線 $x = y^2$ および円の方程式 $x = a - \sqrt{r^2 - y^2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{V(r)}{2\pi} &= \int_0^t y \{a - \sqrt{r^2 - y^2} - y^2\} dy \\ &= \left[\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3}(r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}t^4 \end{aligned}$$

$$a = r^2 + \frac{1}{4}, \quad t^2 = r^2 - \frac{1}{4} \quad \text{により}$$

$$\begin{aligned} \frac{V(r)}{2\pi} &= \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{1}{4}\right) \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{8}r^2 - \frac{1}{192} \\ &= \frac{1}{24} \left(r - \frac{1}{2}\right)^3 (6r + 1) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{12}(6r + 1)$$

$$\text{よって} \quad \lim_{r \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{3}$$

■

- 4** (1) $P = A - E$ を $P^2 = P$ に代入すると

$$(A - E)^2 = A - E \quad \text{ゆえに} \quad A^2 - 3A + 2E = O \quad \cdots \textcircled{1}$$

ハミルトン・ケリーの定理を $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 - 3A + (3a - a^2 + 3b)E = O \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (a^2 - 3a - 3b + 2)E = O$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a^2 - 3a - 3b + 2 = 0}$$

- (2) (1) の結果から $b = \frac{(a-1)(a-2)}{3}$ よって $\mathbf{a}$ は $\mathbf{3}$ の倍数ではない

- (3) $\textcircled{1}$ より $A(A - 3E) + 2E = O$ ゆえに $A(P - 2E) + 2E = 0$

$$\text{したがって} \quad A \left(-\frac{1}{2}P + E \right) = E \quad \text{すなわち} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}P + E$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{s = -\frac{1}{2}, t = 1}$$



5 (1) $C_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ とすると ($a > 0, b > 0$)

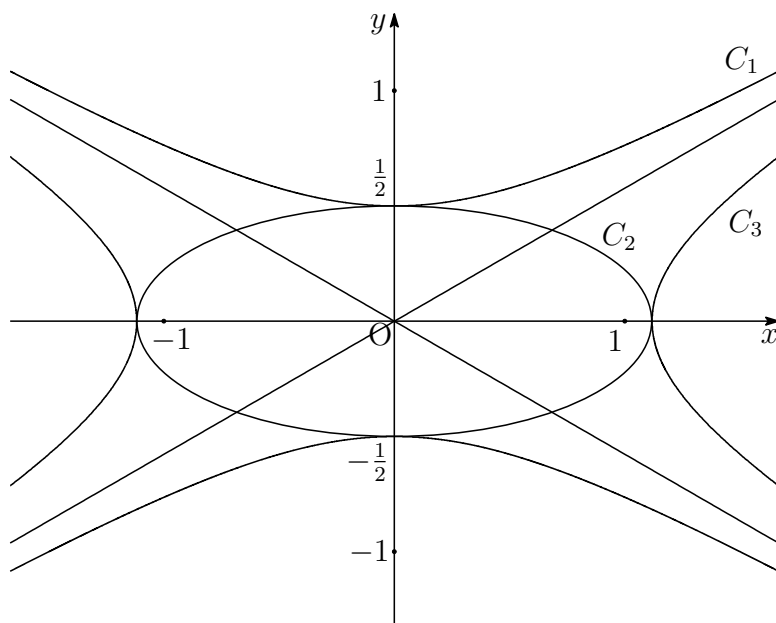
$$b = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{3}{4}, \quad b^2 = \frac{1}{4}$$

よって $C_1 : \frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = -1$

$C_2 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ とすると ($p > 0, q > 0$)

$$q = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{p^2 - q^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = \frac{5}{4}, \quad q^2 = \frac{1}{4}$$

よって $C_2 : \frac{4}{5}x^2 + 4y^2 = 1$



(2) $C_3 : \frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = k$ とおける. これが C_2 の頂点 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ を通るから

$$k = \frac{5}{3} \quad \text{よって} \quad C_3 : \frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = \frac{5}{3}$$

■

- 6** (1) 得点を X に対し, $Z = \frac{X - 395}{130}$ とおくと, Z は正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X = 616 \text{ のとき} \quad Z = \frac{616 - 395}{130} = 1.7$$

正規分布表より, $p(1.7) = 0.4554$ であるから

$$0.5 - p(1.7) = 0.5 - 0.4554 = 0.0446$$

0.0446, すなわち, **4.5%** 以内

- (2) $\frac{1200}{4540} = 0.2643$ ゆえに $0.5 - 0.2643 = 0.2357$

正規分布表から, $p(u) = 0.2357$ となる u は $u = 0.63$

$$\text{したがって} \quad \frac{X - 395}{130} = 0.63 \quad \text{ゆえに} \quad X = 476.9$$

よって, 合格するには少なくとも **477** 点以上の成績であればよい.

- (3) $Y = \frac{X - 463}{100}$ とすると, Y は正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\frac{477 - 463}{100} = 0.14$$

正規分表から, $p(0.14) = 0.0557$ であるから

$$0.5 - p(0.14) = 0.5 - 0.0557 = 0.4443$$

0.4443, すなわち, C 高校の生徒の **44.4%** が合格する. ■

7 (1) (i) $f(s_0) > f(t_0)$ のとき

$$\begin{cases} a_1 = s_0 = a + (1-p)(b-a) \\ b_1 = b_0 = b \\ s_1 = t_0 = a + p(b-a) \\ t_1 = a_1 + p(b_1 - a_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_1 - s_1}{b_1 - a_1} &= \frac{b - \{a + p(b-a)\}}{b - \{a + (1-p)(b-a)\}} = \frac{(1-p)(b-a)}{p(b-a)} = \frac{1-p}{p} \\ \frac{t_1 - a_1}{b_1 - a_1} &= \frac{\{a_1 + p(b_1 - a_1)\} - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{p(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1} = p \end{aligned}$$

(ii) $f(s_0) \leq f(t_0)$ のとき

$$\begin{cases} a_1 = a_0 = a \\ b_1 = t_0 = a + p(b-a) \\ t_1 = s_0 = a + (1-p)(b-a) \\ s_1 = a_1 + (1-p)(b_1 - a_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_1 - s_1}{b_1 - a_1} &= \frac{b_1 - \{a_1 + (1-p)(b_1 - a_1)\}}{b_1 - a_1} = \frac{p(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1} = p \\ \frac{t_1 - a_1}{b_1 - a_1} &= \frac{\{a + (1-p)(b-a)\} - a}{\{a + p(b-a)\} - a} = \frac{(1-p)(b-a)}{p(b-a)} = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

$p = \frac{b_1 - s_1}{b_1 - a_1} = \frac{t_1 - a_1}{b_1 - a_1}$ が成立するとき, (i), (ii) より

$$p = \frac{1-p}{p} \quad \text{ゆえに} \quad p^2 + p - 1 = 0$$

$\frac{1}{2} < p < 1$ に注意して, これを解くと $p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) (1) で求めた p に対して

$$(*) \quad p = \frac{b_i - s_i}{b_i - a_i} = \frac{t_i - a_i}{b_i - a_i}$$

とおく.

[1] (1) の結果から, $i = 1$ のとき, $(*)$ は成立する.

[2] $i = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定する.

(i) $f(s_k) > f(t_k)$ のとき

$$\begin{cases} a_{k+1} = s_k \\ b_{k+1} = b_k \\ s_{k+1} = t_k \\ t_{k+1} = a_{k+1} + p(b_{k+1} - a_{k+1}) \end{cases}$$

$$(*) \text{ より } \frac{b_{k+1} - s_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}} = \frac{b_k - t_k}{b_k - s_k} = p$$

$$\text{上の第 4 式より } \frac{t_{k+1} - a_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}} = p$$

(ii) $f(s_k) \leq f(t_k)$ のとき

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = t_k \\ t_{k+1} = s_k \\ s_{k+1} = a_{k+1} + (1 - p)(b_{k+1} - a_{k+1}) \end{cases}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} \frac{b_{k+1} - s_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}} &= \frac{b_{k+1} - \{a_{k+1} + (1 - p)(b_{k+1} - a_{k+1})\}}{b_{k+1} - a_{k+1}} \\ &= \frac{p(b_{k+1} - a_{k+1})}{b_{k+1} - a_{k+1}} = p, \\ \frac{t_{k+1} - a_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}} &= \frac{s_k - a_k}{t_k - a_k} = \frac{\{b_k - p(b_k - a_k)\} - a_k}{p(b_k - a_k)} \\ &= \frac{(1 - p)(b_k - a_k)}{p(b_k - a_k)} = \frac{1 - p}{p} = p \end{aligned}$$

(i), (ii) の結果から

$$p = \frac{b_{k+1} - s_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}} = \frac{t_{k+1} - a_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1}}$$

よって, $i = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 i について, $(*)$ は成立する.

(3) (*) は $i = 0$ のときも成立する.

(i) $f(s_i) > f(t_i)$ のとき

$$b_{i+1} - a_{i+1} = b_i - s_i = p(b_i - a_i)$$

(ii) $f(s_i) \leq f(t_i)$ のとき

$$b_{i+1} - a_{i+1} = t_i - a_i = p(b_i - a_i)$$

(i), (ii) の結果から $b_{i+1} - a_{i+1} = p(b_i - a_i)$

したがって $b_i - a_i = (b_0 - a_0)p^i = (b - a)p^i$

よって, s_i を出力する条件は

$$b_i - a_i < h \quad \text{ゆえに} \quad (b - a)p^i < h \quad \text{よって} \quad p^i < \frac{h}{b - a}$$

