

平成 14 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

- 自然・生物・生物資源・社会工・情報・医学・図書館情報専門学類
(数学 III・C) 1 2 3 必答. 4 5 6 7 から 2 題選択.
- 工学システム・工学基礎学類 (数学 III・C) 1 2 必答.
4 5 6 7 から 1 題選択. 90 分
- 人間学類 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択. 4 5 6 7 から 2 題選択.
- 国際総合 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択. 4 5 6 7 から 2 題選択.

1 a を正の定数とし, 関数 $f(x)$ を以下のように定める.

$$f(x) = \frac{\log x}{(1+x)^a} \quad (x > 0)$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c) = 0$ となる c が存在することを示せ.
- (2) $f'(c) = 0$ となる c はただ一つであり, 関数 $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとることを示せ.

2 曲線 C を次の方程式で定める.

$$y = \sqrt{x^2 + 4} \quad (x \geq 0)$$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P の x 座標, y 座標を t で表せ.
- (2) 点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ.
- (3) 原点を O とし, 線分 OP , 曲線 C , y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ.

- 3 $x \geq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して、関数 $g(x)$ ($x > 0$) を次のように定める.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt \quad (x \geq 1)$$

このとき、次の問いに答えよ.

- (1) $x \neq 1$ における導関数 $g'(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$ のとき、 $g(x)$ を求めよ.
- (3) 次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ.

$$g(x) = \sin(2\pi x) + x \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = 1 \quad (x \geq 1)$$

- 4 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ. ただし、 a, b, c, d は実数とし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $a + d \neq 0$ とする. $A^2 = E$ ならば $A = E$ または $A = -E$ であることを示せ.
- (2) $a = d \neq 0$ とする.
 - (i) 行列 $A^2 + E$ は逆行列を持つことを示せ.
 - (ii) $A^4 = E$ ならば $A = E$ または $A = -E$ であることを示せ.

- 5 a を正の実数とする. 曲線 C_a を極方程式

$$r = 2a \cos(a - \theta)$$

によって定める. このとき、次の問いに答えよ.

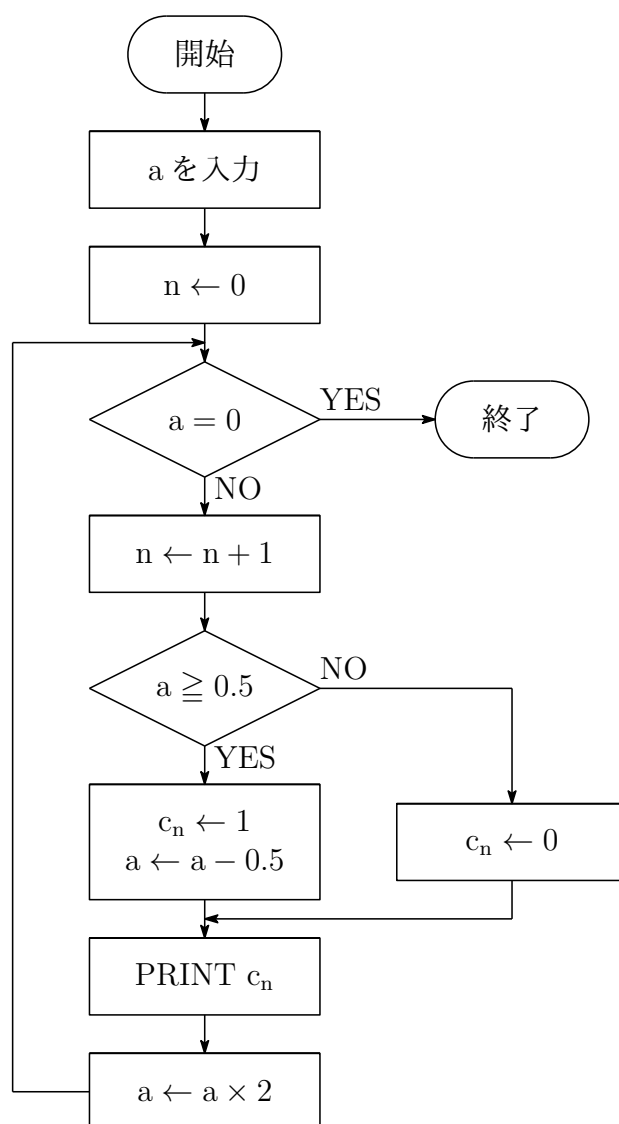
- (1) C_a は円になることを示し、その中心と半径を求めよ.
- (2) C_a が直線 $y = -x$ に接するような a をすべて求めよ.

6 数直線上の原点に立つ人が確率 p で表の出るコインを投げて、表が出れば $+1$ 進み、裏が出れば -1 進むとする。その場所で再びコインを投げ、その結果に応じて $+1$ または -1 進む。これを n 回繰り返した後のこの人の立つ位置を表す確率変数を S_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{2}(S_n + n)$ は 2 項分布 $B(n, p)$ に従うことを示せ。
- (2) $p = \frac{1}{2}$ のコインを 100 回投げた後に、この人が原点から 22 以上隔たっている確率は 0.05 以下であることを示せ。ただし、確率変数 U が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、 $P(|U| < 1.96) = 0.95$ であることは用いてよい。
- (3) 未知の p を持つコインを 100 回投げた後に、この人が -60 の位置にいたとする。このデータに基づいて、 p の値を信頼度 95% で推定せよ。ただし、信頼区間の端点は小数点以下第 2 位まで求めよ。

7 $0 < a < 1$ なる a に対して 0 と 1 の列 $c_1, \dots, c_n$ を次頁の流れ図に従って計算する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a = 0.25$ および $a = 0.375$ のとき、それぞれに対応する $c_1, \dots, c_n$ を求めよ。
- (2) $a = 0.1$ のとき、どのような出力が得られるか説明せよ。
- (3) $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1$ を出力して終了する a を求めよ。
- (4) 逆に $c_1, \dots, c_n$ が与えられたとき、 $c_1, \dots, c_n$ を出力して終了するような a を求める BASIC プログラムを書け。ただし、 n および $c_1, \dots, c_n$ は変数 N と $C(1), \dots, C(N)$ に代入されているものとする。



解答例

1 (1) $f(x) = (1+x)^{-a} \log x$ より ($x > 0$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a(1+x)^{-a-1} \log x + (1+x)^{-a} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{-ax \log x + (1+x)}{x(1+x)^{a+1}} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(e^{\frac{1}{a}}) &= \frac{-a \cdot e^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a} + \left(1 + e^{\frac{1}{a}}\right)}{e^{\frac{1}{a}} \left(1 + e^{\frac{1}{a}}\right)^{a+1}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{a}} \left(1 + e^{\frac{1}{a}}\right)^{a+1}} > 0, \\ f'(e^{\frac{2}{a}}) &= \frac{-a \cdot e^{\frac{2}{a}} \cdot \frac{2}{a} + \left(1 + e^{\frac{2}{a}}\right)}{e^{\frac{2}{a}} \left(1 + e^{\frac{2}{a}}\right)^{a+1}} = \frac{1 - e^{\frac{2}{a}}}{e^{\frac{2}{a}} \left(1 + e^{\frac{2}{a}}\right)^{a+1}} < 0 \end{aligned}$$

$f'(x)$ は $x > 0$ において、微分可能である．上の 2 式から、中間値の定理により、次式を満たす c が存在する．

$$f'(c) = 0, \quad e^{\frac{1}{a}} < c < e^{\frac{2}{a}}$$

(2) $(*)$ の分子を $g(x)$ とおくと、 $f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致する．

$$g(x) = -ax \log x + (1+x), \quad g'(x) = -a \log x - a + 1$$

$g(x)$ の増減表は、次のようになる．

x	(0)	$\dots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\dots$	∞
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

$g(x) = 0$ ，すなわち、 $f'(x) = 0$ を満たすのは、(1) で求めた c ただ一つである．したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\dots$	c	$\dots$	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、関数 $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとる．



- 2 (1) x 切片が $2t$, 傾き -1 の直線は $y = -(x - 2t) \cdots \textcircled{1}$

直線 $\textcircled{1}$ と曲線 $C: y = \sqrt{x^2 + 4}$ の方程式から y を消去すると

$$-x + 2t = \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{ゆえに} \quad (-x + 2t)^2 = x^2 + 4$$

整理すると $tx = t^2 - 1$ $t \neq 0$ は自明であるから $x = t - \frac{1}{t}$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $y = t + \frac{1}{t}$ よって $P\left(t - \frac{1}{t}, t + \frac{1}{t}\right)$

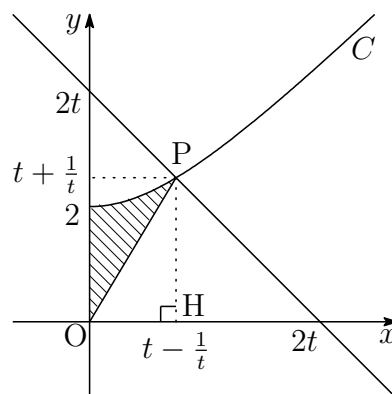
- (2) (1) の結果から, C および P の位置関係から

$$t + \frac{1}{t} \geq 2, \quad t - \frac{1}{t} \geq 0$$

上の第 1 式から, $t > 0$ であるから

$$(t - 1)^2 \geq 0, \quad (t + 1)(t - 1) \geq 0$$

ゆえに $t \geq 1$ よって t の最小値は 1



- (3) P から x 軸に垂線 PH を引くと, 求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{t-\frac{1}{t}} \sqrt{x^2 + 4} dx - \triangle OPH \\ &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\log(x + \sqrt{x^2 + 4}) \right]_0^{t-\frac{1}{t}} - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right) + 2\log t - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ &= 2\log t \end{aligned}$$

補足 $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + 4}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ より, $x\sqrt{x^2 + 4}$ を微分すると

$$\begin{aligned} (x\sqrt{x^2 + 4})' &= \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} = 2\sqrt{x^2 + 4} - \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= 2\sqrt{x^2 + 4} - 4\{\log(x + \sqrt{x^2 + 4})\}' \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \int \sqrt{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\log(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$$

別解 (ガウス・グリーンの定理) 偏角が正の向きに積分区間をとる.

$$S = \frac{1}{2} \int_{t-\frac{1}{t}}^0 (xy' - y) dx = -2 \int_{t-\frac{1}{t}}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} = 2\log t$$

■

- 3** (1) $x \geq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して,

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt \quad (x \geq 1)$$

を満たす関数 $g(x)$ ($x > 0$) をそれぞれ微分すると

$$g'(x) = f(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$g'(x) = f(x) - f(x-1) \quad (x > 1)$$

- (2) $0 < x < 1$ のとき

$$g(x) = \int_0^x 2\pi \cos(2\pi t) dt = \left[\sin(2\pi t) \right]_0^x = \sin(2\pi x)$$

$x \geq 1$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^x 2\pi \cos(2\pi t) dt = \left[\sin(2\pi t) \right]_{x-1}^x$$

$$= \sin(2\pi x) - \sin\{2\pi(x-1)\} = 0$$

- (3) (i) $0 < x < 1$ のとき, $g(x) = \sin(2\pi x) + x$ および (1) の結果から

$$g'(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1 \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$$

- (ii) $x \geq 1$ のとき, $g(x) = 1$ および (1) の結果から

$$g'(x) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad f(x) - f(x-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = f(x-1)$$

よって, $x \geq 1$ において, $f(x)$ は周期 1 の周期関数である.

$f(x)$ が連続であることから, (i), (ii) の結果から

$$f(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$$



- 4 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

これに $A^2 = E$ を代入すると

$$E - (a + d)A + (ad - bc)E = O \quad \text{ゆえに} \quad (a + d)A = (ad - bc + 1)E$$

$a + d \neq 0$ より, $A = kE$ とおけるから (k は定数)

$$(kE)^2 = E \quad \text{ゆえに} \quad k^2 = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \pm 1$$

よって $A = E$ または $A = -E$

- (2) (i) $a = d$ より, $\delta = a^2 - bc$ とおくと

$$A^2 - 2aA + \delta E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = 2aA - \delta E \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$A^2 + E = 2aA + (1 - \delta)E \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} A(A^2 + E) &= 2aA^2 + (1 - \delta)A \\ &= 2a(2aA - \delta E) + (1 - \delta)A \\ &= (4a^2 + 1 - \delta)A - 2a\delta E \end{aligned}$$

① から

$$\frac{4a^2 + 1 - \delta}{2a}(A^2 + E) = (4a^2 + 1 - \delta)A + \frac{(1 - \delta)(4a^2 + 1 - \delta)}{2a}$$

上の 2 式から

$$\left(A - \frac{4a^2 + 1 - \delta}{2a}E \right) (A^2 + E) = -\frac{1}{2a}\{4a^2 + (1 - \delta)^2\}E$$

$a \neq 0$ であるから, $A^2 + E$ は次の逆行列をもつ.

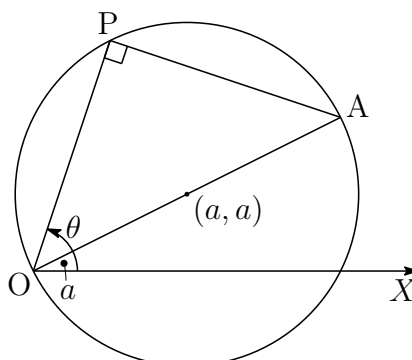
$$-\frac{2a}{4a^2 + (1 - \delta)^2} \left(A - \frac{4a^2 + 1 - \delta}{2a}E \right)$$

- (ii) $A^4 = E$ より $(A^2 + E)(A^2 - E) = O$

$A^2 + E$ が正則であるから $A^2 - E = O$ すなわち $A^2 = E$

さらに (1) の結果から $A = E$ または $A = -E$ ■

- 5** (1) 中心 (a, a) , 半径 a



- (2) $a = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (n は 0 以上の整数)

- 6** (1) n 回のコインを投げて, 表が x 回, 裏が $n - x$ 回出たとき

$$S_n = 1 \cdot x + (-1) \cdot (n - x) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{S_n + n}{2}$$

このときの確率は

$$P\left(\frac{S_n + n}{2}\right) = P(x) = {}_n C_x p^x (1 - p)^{n-x}$$

よって, $\frac{1}{2}(S_n + n)$ は 2 項分布 $B(n, p)$ に従う.

- (2) $X = \frac{S_{100} + 100}{2}$ とおくと, X は 2 項分布 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, \quad V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25$$

X は正規分布 $N(50, 25)$ に近似できるから

$$U = \frac{X - 50}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\begin{aligned} P(|S_{100}| \geq 22) &= 1 - P(|S_{100}| < 22) = 1 - P(|2X - 100| < 22) \\ &= 1 - P\left(\left|\frac{X - 50}{5}\right| < \frac{11}{5}\right) = 1 - P(|U| < 2.2) \\ &\leq 1 - P(|U| < 1.96) = 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

よって $P(|S_{100}| \geq 22) \leq 0.05$

$$(3) S_{100} = -60 \text{ より } X = \frac{-60 + 100}{2} = 20 \quad \text{標本比率 } \bar{p} = \frac{20}{100} = 0.2$$

X は 2 項分布 $B(100, p)$ に従うから

$$E(X) = 100p, \quad V(X) = 100p(1-p)$$

$P(|U| < 1.96) = 0.95$ であるから, p の信頼度 95% の信頼区間は

$$\left| \frac{X - 100p}{10\sqrt{p(1-p)}} \right| < 1.96$$

したがって

$$\frac{X}{100} - \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{10} < p < \frac{X}{100} + \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{10}$$

これから

$$\bar{p} - \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{10} < p < \bar{p} + \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{10}$$

n が十分大きいから, 母分散は標本分散で近似されるから

$$\bar{p} - \frac{1.96\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{10} < p < \bar{p} + \frac{1.96\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{10}$$

$\bar{p} = 0.2$ より

$$0.2 - 0.078 < p < 0.2 + 0.078 \quad \text{よって} \quad [0.12, 0.27]$$

■

7 (1) $a = 0.25$ のとき, 変数推移表は次のようになる.

n	1	c_n
1	0.25	0
2	0.5	1

$a = 0.375$ のとき, 変数推移表は次のようになる.

n	1	c_n
1	0.375	0
2	0.75	1
3	0.25	1

(2) $p = 2$ とすると $\frac{1}{10} = \frac{1}{p^3 + p} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2}}$

このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2}} &= 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^6} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{4n}} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{4n}} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{4n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^{4n+4}} + \frac{1}{p^{4n+5}}\right) = 0.0001\dot{1}_{(2)} \end{aligned}$$

よって、求める出力は

00011001100110011...

(3) $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1$ より

$$a = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0.5 + 0.125 + 0.0625 = \mathbf{0.6875}$$

(4) $a = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n}$ であるから

```

100 INPUT "n=";N
110 DIM C(N)
120 FOR J=1 TO N
130 PRINT "c(";j;")="
140 INPUT INPUT C(M)
150 NEXT J
160 A=0, D=1
170 FOR K=1 TO N
180 D=2*D, B=C(K)/D, A=A+B
190 NEXT K
200 PRINT "a=";A
210 END

```

