平成 13 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 自然・生物・生物資源・社会工・情報・医学・図書館情報専門学類
  (数学 III・C) 1 2 3 必答． 4 5 6 7 から 2 題選択．
- 工学システム・工学基礎学類 (数学 III・C) 1 2 必答．
  4 5 6 7 から 1 題選択．90 分
- 人間学類 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択または 4 5 6 7 から 2 題選択．
- 国際総合 (数学 III・C) 1 2 3 から 2 題選択． 4 5 6 7 から 2 題選択．

1 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ において連続かつ，$0 < x < 1$ において微分可能で $f'(x) > 0$ を満たす関数とする．$0 < t < 1$ に対し

$$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)| x \, dx$$

とおく．

(1) 導関数 $I'(t)$ を求めよ．

(2) $I(t)$ が最小となる t の値を求めよ．

2 (1) $x > 0$ に対して次の不等式を示せ．

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(2) $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続で，$f(x) \geqq 0$ を満たす関数とする．

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right),$$

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx$$

とおくとき，

$$\lim_{n \to \infty} a_n = e^I$$

であることを示せ．

3 曲線 $y = x(1-x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ．

(1) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ．

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ．

4 数列 $\{a_n\}$ と数 c が次の条件を満たすとする．

$$\begin{aligned} &a_1 = 2,\quad a_2 = 2, \\ &a_{n+1} = 2a_n + ca_{n-1} \\ &a_{n+2} = (2c+1)a_n + 6a_{n-1} \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

(1) c を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 A を求めよ．

(3) $A \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ を満たす数 b をすべて求めよ．

(4) a_n を求めよ．

5 C を双曲線 $2x^2 - 2y^2 = 1$ とする．l，m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta + \dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする．ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする．

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P，Q で交わることを示せ．

(2) PQ^2 を，θ を用いて表せ．

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R，S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ．

6 $f(x) = \dfrac{1}{4x^8 + 5x^3 + 1}$ とする．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分した分点を

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ \cdots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = 1$$

とする．

(1) 不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqq \int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

を示せ．

(2) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ と $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ がともに $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の小数第 3 位までの近似値となるためには，n をどのくらい大きくとればよいか．

(3) (2) の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の小数第 3 位までの近似値を計算するプログラムを書け．

$\boxed{7}$ 生徒数 32 名のある学級で生徒の兄弟姉妹の数 (x) と，いとこの数 (y) とを調べたところ，次の表を得た．

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	3	4	1	0
1	4	4	4	4
2	0	1	4	3

(1) 変量 y の平均 μ_y と ${\sigma_y}^2$ を求めよ．

(2) 変量 x と変量 y の相関係数について説明せよ．

(3) 2 人の生徒を無作為に復元抽出し，いとこの数 $Y_1,\ Y_2$ を調べる．標本 $Y_1,\ Y_2$ について，標本平均の期待値を求めよ．また，この場合，標本平均の分散は標本分散の期待値に等しくなることを示し，その値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $0 < x < 1$ において $f'(x) > 0$ より，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \{f(t) - f(x)\}x\,dx + \int_t^1 \{f(x) - f(t)\}x\,dx \\ &= f(t)\int_0^t x\,dx - \int_0^t xf(x)\,dx + \int_t^1 xf(x)\,dx - f(t)\int_t^1 x\,dx \\ &= \frac{t^2}{2}f(t) - \int_0^t xf(x)\,dx + \int_t^1 xf(x)\,dx - \frac{1}{2}f(t)(1-t^2) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} I'(t) &= tf(t) + \frac{t^2}{2}f'(t) - tf(t) - tf(t) - \frac{1}{2}f'(t)(1-t^2) + tf(t) \\ &= \boldsymbol{f'(t)\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

(2) $0 < t < 1$ において，$f'(t) > 0$．(1) の結果から，$I(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$I'(t)$		$-$	0	$+$	
$I(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$I(t)$ を最小にする t は $\boldsymbol{t = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t>0$ のとき　$1-t^2<1<1+t$　ゆえに　$1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$

$x>0$ のとき　$\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt \ <\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt<\int_0^x \,dt$

$$x-\frac{x^2}{2}\ <\log(1+x)<x$$

(2) $f(x)\geqq 0$，$\displaystyle\log a_n=\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ であるから，(1) の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left\{\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\leqq\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)\quad(*)$$

ここで，$M=\displaystyle\max_{0\leqq x\leqq 1}f(x)^2$ とすると

$$0\leqq\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)^2\leqq\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}M=\frac{M}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n}=0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)^2=0$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{n}{k}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=I$ であるから，$(*)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=I\quad よって\quad \lim_{n\to\infty}a_n=e^I$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=x(1-x)$ より $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

$$x^2-x+y=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}$$

容器の体積を M とすると

$$M=\pi\int_0^h x^2\,dy=\pi\int_0^h\left(\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}\right)^2 dy$$

これを h について微分すると $\dfrac{dM}{dh}=\pi\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4h}}{2}\right)^2$

$\dfrac{dM}{dt}=V,\ \dfrac{dh}{dt}=u$ であるから

$$V=\frac{dM}{dt}=\frac{dM}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\left(\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2}\right)^2 u$$

よって $\quad \boldsymbol{u=\dfrac{4V}{\pi(1-\sqrt{1-4h})^2}}$

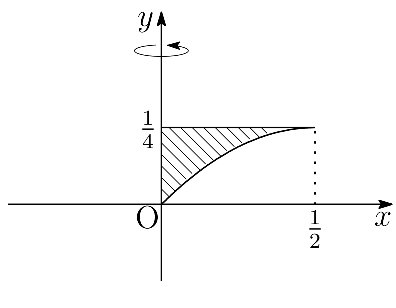
(2) $y=x(1-x)$ より $\dfrac{dy}{dx}=1-2x$

x	$0 \to \frac{1}{2}$
y	$0 \to \frac{1}{4}$

水が満杯になるまでの時間を t とすると

$$\begin{aligned} Vt &= \pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dy=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\cdot dx \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\left(\frac{1}{2}-x\right)dx \\ &= 2\pi\cdot\frac{2!1!}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{\pi}{96} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{t=\dfrac{\pi}{96V}}$ ■



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + ca_{n-1} && \cdots ① \\ a_{n+2} &= (2c+1)a_n + 6a_{n-1} && \cdots ② \end{aligned}$$

① より $\quad \begin{aligned}[t] a_{n+2} &= 2a_{n+1} + ca_n \\ &= 2(2a_n + ca_{n-1}) + ca_n = (4+c)a_n + 2ca_{n-1} \end{aligned}$

これと ② の係数を比較すると

$$4 + c = 2c + 1, \quad 2c = 6$$

上の第 1 式を解いて $c = 3$，これが第 2 式を満たすから $\quad \boldsymbol{c = 3}$

(2) (1) の結果から $\begin{cases} a_n = a_n \\ a_{n+1} = 3a_{n-1} + 2a_n \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

(3) A の特性方程式は $\qquad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda = -1,\ 3$$

このとき $\quad A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - 3E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A+E)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3E)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

よって $\qquad \boldsymbol{b = -1,\ 3}$

(4) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ とおくと　$AP=PB$

$$P^{-1}AP=B \quad \text{ゆえに} \quad P^{-1}A^{n-1}P=B^{n-1}$$

したがって　　$A^{n-1}=PB^{n-1}P^{-1}$

$$\begin{aligned}A^{n-1}&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{n-1} & 0\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3(-1)^{n-1}+3^{n-1} & (-1)^n+3^{n-1}\\ 3(-1)^n+3^n & (-1)^{n-1}+3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ より

$$\boldsymbol{a_n=(-1)^{n-1}+3^{n-1}}$$

別解 $(*)$ より

$$A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \quad A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

したがって

$$A^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{n-1} & 3^{n-1}\\ (-1)^n & 3^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A^{n-1}&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(-1)^{n-1} & 3^{n-1}\\ (-1)^n & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3(-1)^{n-1}+3^{n-1} & (-1)^n+3^{n-1}\\ 3(-1)^n+3^n & (-1)^{n-1}+3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ より

$$\boldsymbol{a_n=(-1)^{n-1}+3^{n-1}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $C: 2x^2-2y^2=1$，$l: y=(x-1)\tan\theta$ の 2 式から y を消去し整理すると

$$2(1-\tan^2\theta)x^2+4(\tan^2\theta)x-(1+2\tan^2\theta)=0$$

θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないから，$1-\tan^2\theta\neq 0$．上式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= 4\tan^4\theta-2(1-\tan^2\theta)(1+2\tan^2\theta)\\ &= 2(1+\tan^2\theta)>0 \end{aligned}$$

よって，直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点で交わる．

(2) $(*)$ の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= |\beta-\alpha|^2(1+\tan^2\theta)\\ &= \left\{\frac{\sqrt{2(1+\tan^2\theta)}}{1-\tan^2\theta}\right\}^2(1+\tan^2\theta)\\ &= 2\left(\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{2}{\cos^2 2\theta}} \end{aligned}$$

(3) (2) の θ を $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ とすることにより

$$\mathrm{RS}^2=\frac{2}{\cos^2 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\sin^2\theta}$$

よって $\quad \dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}=\dfrac{\cos^2 2\theta}{2}+\dfrac{\sin^2 2\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$

よって，題意は成立する．

補足 点 $(1,\ 0)$ は C の焦点 F である．C 上の点 P とし，FP の x 軸との偏角を θ とすると，C 上の点 P は F を極とする極方程式で表される [1]．

$$r(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)}$$

$0 \leqq \theta < \pi$ について，次のようになる．

(i) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\mathrm{FP} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)}, \quad \mathrm{FQ} = -\frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{FQ} - \mathrm{FP} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)} - \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2\theta}\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$ のとき

$$\mathrm{FP} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)}, \quad \mathrm{FQ} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{FP} + \mathrm{FQ} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)} + \frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos 2\theta}\end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ のとき

$$\mathrm{FP} = -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)}, \quad \mathrm{FQ} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{FP} - \mathrm{FQ} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\cos\theta)} - \frac{1}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\cos\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2\theta}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より　$\mathrm{PQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{|\cos 2\theta|}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.8)

6 (1) $f(x)=\dfrac{1}{4x^8+5x^3+1}$ は $x \geqq 0$ において，単調減少であるから

$$\frac{1}{n}f(x_i) \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f(x_{i-1}) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

i について，1 から n まで加えると

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

よって $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqq \int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

(2) 次式を満たせばよいから

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n}\{f(0)-f(1)\} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{10}\right) < 0.0001$$

これを解いて　$\boldsymbol{n > 9000}$

(3) $n=9001$ とすればよいから

```
110 L=0, M=0
120 FOR I=0 TO 9001
130 X=I/9001
140 FX=1/(4*X^8+5*X^3+1)
150 IF I=9001 THEN 180
160 M=M+FX/9001
170 IF K=0 THEN 190
180 L=L+FX/9001
190 NEXT I
200 PRINT "M=";M
210 PRINT "L=";L
220 END
```

■

7 (1) 度数分布表は次のようになる．

x \ y	1	2	3	4	度数
0	3	4	1	0	8
1	4	4	4	4	16
2	0	1	4	3	8
度数	7	9	9	7	32

したがって

$$\mu_y = \frac{1}{32}(1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 9 + 4\cdot 7) = \frac{80}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned}{\sigma_y}^2 &= \frac{1}{32}\left\{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\cdot 7 + \left(2-\frac{5}{2}\right)^2\cdot 9 + \left(3-\frac{5}{2}\right)^2\cdot 9 + \left(4-\frac{5}{2}\right)^2\cdot 7\right\}\\ &= \frac{36}{32} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

(2) 変量 x の平均を μ_x，分散を ${\sigma_x}^2$ とすると

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{1}{32}(0\cdot 8 + 1\cdot 16 + 2\cdot 8) = \frac{32}{32} = 1\\ {\sigma_x}^2 &= \frac{1}{32}\{(0-1)^2\cdot 8 + (1-1)^2\cdot 16 + (2-1)^2\cdot 8\} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

これと (1) の結果から，x，y の相関係数 r は

$$\begin{aligned}r =& \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\sum_{i=1}^{32}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)\\ =& \frac{1}{32\sigma_x\sigma_y}\left\{(0-1)\times\left(\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot 3 + \left(2-\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \left(3-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 + \left(4-\frac{2}{5}\right)\cdot 0\right)\right.\\ &\left. + 0 + (2-1)\times\left(\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot 0 + \left(2-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 + \left(3-\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \left(4-\frac{2}{5}\right)\cdot 3\right)\right\}\\ =& \frac{12}{32\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{9}{8}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

x と y は弱い正の相関がある．

(3) 標本平均 $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の期待値 $E(\overline{Y})$ は

$$E(\overline{Y}) = E\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(Y_1) + \frac{1}{2}E(Y_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

$\overline{Y}$ の分散 $V(\overline{Y})$ は

$$\begin{aligned} V(\overline{Y}) &= V\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right) = V\left(\frac{V_1}{2}\right) + V\left(\frac{V_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}V(Y_1) + \frac{1}{4}V(Y_2) = \frac{1}{4}{\sigma_y}^2 + \frac{1}{4}{\sigma_y}^2 = \frac{1}{2}{\sigma_y}^2 \end{aligned}$$

標本分散を s^2 とすると

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{2}\{(Y_1 - \overline{Y})^2 + (Y_2 - \overline{Y})^2\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{Y_1 - Y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}(Y_1 - Y_2)^2 \\ &= \frac{1}{4}({Y_1}^2 - 2Y_1Y_2 + {Y_2}^2) \end{aligned}$$

${\sigma_y}^2 = E(Y^2) - {\mu_y}^2$ より　$E(Y^2) = {\sigma_y}^2 + {\mu_y}^2$

したがって，s^2 の期待値 $E(s^2)$ は，

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{1}{4}\{E({Y_1}^2) - 2E(Y_1)E(Y_2) + E({Y_2}^2)\} \\ &= \frac{1}{4}\{({\sigma_y}^2 + {\mu_y}^2) - 2{\mu_y}^2 + ({\sigma_y}^2 + {\mu_y}^2)\} = \frac{{\sigma_y}^2}{2} \end{aligned}$$

$V(\overline{Y}) = E(s^2)$ より　(標本平均の分散) = (標本分散の平均)

よって，求める値は　$\dfrac{{\sigma_y}^2}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{8} = \mathbf{\dfrac{9}{16}}$ ■