

令和7年度 東京科学大学 2次試験前期日程 (数学問題)180分
理工学系 数I・II・III・A・B・C 令和7年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 関数 $f(x)$ を $x \geq 0$ に対して $f(x) = x \log(1+x)$ と定める.

(1) 不定積分 $\int x \log(1+x) dx$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の逆関数を $y = g(x)$ ($x \geq 0$) とする. また a, b を $g(a) = 1, g(b) = 2$ となる実数とする. このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

の値を求めよ.

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geq 0$ に対して $P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ と定める. このとき $y = P(x)$ について, 定義域を $x \geq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい. 関数 $R(x)$ を $x \geq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv$$

と定めるとき, $R(x)$ を求めよ.

2 空間の点 $(0, 0, 1)$ を通り $(1, -1, 0)$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とし, 点 $(1, 0, 3)$ を通り $(0, 1, -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする.

(1) P を ℓ 上の点とし, Q を m 上の点とする. また直線 PQ は直線 ℓ と直線 m に垂直であるとする. このとき P と Q の座標, および線分 PQ の長さを求めよ.

(2) ℓ 上に2点

$$A = (t, -t, 1)$$

$$B = (2+t+\sin t, -2-t-\sin t, 1)$$

があり, m 上に2点

$$C = (1, t, 3-2t)$$

$$D = (1, 2+t+\cos t, -1-2t-2\cos t)$$

があるとする. ただし, t は実数とする. 四面体 $ABCD$ の体積を $V(t)$ とする. $V(0)$ を求めよ.

(3) t が $t \geq 0$ を動くとき, $V(t)$ の最大値と最小値を求めよ.

3 $0 < p < 1$ とする. 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う.

- ゲームの開始段階で点数は 0 点.
- コインを投げ続け, 表が出るごとに 1 点加算し, 裏が出たときは点数はそのまま.
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了.

0 以上の整数 n に対し, ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする.

- (1) Q_1, Q_2 を p を用いて表せ.
- (2) Q_n を n と p を用いて表せ.
- (3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい.

- (4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ.

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

により定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める。ただし、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であるものとする。

- (1) $n \geq 2$ に対して、 $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ。
- (2) $m \geq 1$ (m は整数) に対して、 $a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ。

5 (1) 関数

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} \quad (t \neq 0)$$

の増減を調べ、グラフの概形をかけ。

(2) 実数 x, y, z が、条件

$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき、 x が取り得る値の範囲を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad \int x \log(1+x) dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)' \log(x+1) dx \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{2} \int (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{4} (x-1)^2 + C
 \end{aligned}$$

別解 $t = \log(x+1)$ とおくと $x+1 = e^t$, $\frac{dx}{dt} = e^t$

$$\begin{aligned}
 \int x \log(1+x) dx &= \int (e^t - 1) t e^t dt = \int t(e^{2t} - e^t) dt \\
 &= \int t \left(\frac{1}{2} e^{2t} - e^t \right)' dt \\
 &= t \left(\frac{1}{2} e^{2t} - e^t \right) - \left(\frac{1}{4} e^{2t} - e^t \right) + C \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} (x+1)^2 - (x+1) \right\} \log(x+1) \\
 &\quad - \frac{1}{4} (x+1)^2 + (x+1) + C \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)(x-3) + C
 \end{aligned}$$

(2) $g^{-1}(x) = f(x) = x \log(1+x)$ であるから, $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ より

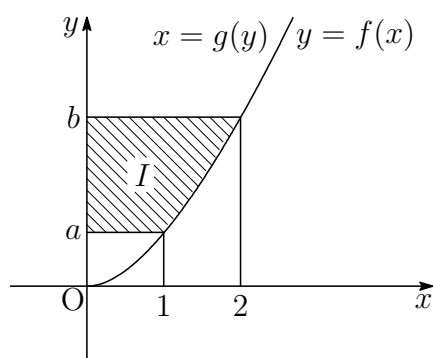
$$a = f(1) = \log 2, \quad b = f(2) = 2 \log 3$$

$x = f(y)$ とおくと, $\frac{dx}{dy} = f'(y)$, $g(f(y)) = y$ であるから

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b g(x) dx = \int_{f(1)}^{f(2)} g(x) dx \\
 &= \int_1^2 g(f(y)) f'(y) dy = \int_1^2 y f'(y) dy \\
 &= \left[y f(y) \right]_1^2 - \int_1^2 f(y) dy \\
 &= 2f(2) - f(1) - \left[\frac{1}{2} (y^2 - 1) \log(y+1) - \frac{1}{4} (y-1)^2 \right]_1^2 \\
 &= 2 \cdot 2 \log 3 - \log 2 - \left(\frac{3}{2} \log 3 - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{2} \log 3 - \log 2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

別解 $I = \int_a^b g(y) dy$ とする. $x > 0$ において, $f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} > 0$
 $x > 0$ において $f(x)$ は単調増加であるから, 下の図から

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot b - 1 \cdot a - \int_1^2 f(x) dx \\ &= 2f(2) - f(1) - \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} \log 3 - \log 2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$(3) \quad P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt \quad \text{より}$$

$$P(0) = 0, \quad P'(x) = \sqrt{1+f(x)}$$

$v = P(u)$ とおくと, $Q(P(u)) = u$ であるから

$$Q'(P(u))P'(u) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{Q'(v)} = P'(u)$$

$\frac{dv}{du} = P'(u)$ であるから, (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv = \int_{P(0)}^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv \\ &= \int_0^x P'(u) \cdot P'(u) du = \int_0^x P'(u)^2 du \\ &= \int_0^x \{1+f(u)\} du = x + \int_0^x f(u) du \\ &= x + \left[\frac{1}{2}(u^2 - 1) \log(u+1) - \frac{1}{4}(u-1)^2 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

■

- 2** (1) 2点 P, Q を定数 p, q を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (0, 0, 1) + p(1, -1, 0), \quad \overrightarrow{OQ} = (1, 0, 3) + q(0, 1, -2)$$

とおくと

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2) - p(1, -1, 0) + q(0, 1, -2)$$

$\overrightarrow{PQ} \perp (1, -1, 0), \overrightarrow{PQ} \perp (0, 1, -2)$ であるから

$$1 - 2p - q = 0, \quad -4 + p + 5q = 0$$

これを解いて $p = \frac{1}{9}, q = \frac{7}{9}$

したがって $\overrightarrow{OP} = (0, 0, 1) + \frac{1}{9}(1, -1, 0) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 1\right)$

$$\overrightarrow{OQ} = (1, 0, 3) + \frac{7}{9}(0, 1, -2) = \left(1, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

よって $P\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 1\right), Q\left(1, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right), PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{4}{3}$

- (2) 与えられた4点 A, B, C, D から

$$\overrightarrow{AB} = (2 + \sin t, -2 - \sin t, 0) = (2 + \sin t)(1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - t, 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= (1 - t, 2 + 2t + \cos t, -2 - 2t - 2\cos t) \\ &= (1 - t, 2t, 2 - 2t) + (0, 2 + \cos t, -4 - 2\cos t) \\ &= \overrightarrow{AC} + (2 + \cos t)(0, 1, -2) \end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2 + \sin t)(2t - 2, 2t - 2, t + 1)$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -4(2 + \sin t)(2 + \cos t)$$

$$V(t) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3} (2 + \sin t)(2 + \cos t)$$

よって $V(0) = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 4$

(3) $\frac{3}{2}V(t) = (2 + \sin t)(2 + \cos t)$ より

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}V'(t) &= \cos t(2 + \cos t) + (2 + \sin t)(-\sin t) \\ &= 2(\cos t - \sin t) + \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= (\cos t - \sin t)(2 + \cos t + \sin t) \\ &= -\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\left\{2 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

$V(t)$ の最大値・最小値は、 $0 \leq t \leq 2\pi$ について調べればよいから

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5\pi}{4}$	...	2π
$V'(t)$		+	0	-	0	+	
$V(t)$	4	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	4

したがって

$$\begin{aligned}V\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \\ V\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって 最大値 $3 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$, 最小値 $3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$

別解 (2) の結果から

$$\begin{aligned}3V(t) &= 2(2 + \sin t)(2 + \cos t) \\ &= 2\sin t \cos t + 4(\sin t + \cos t) + 8 \\ &= (\sin t + \cos t)^2 + 4(\sin t + \cos t) + 7 \\ &= (\sin t + \cos t + 2)^2 + 3\end{aligned}$$

したがって $V(t) = \frac{1}{3}\left\{\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\right\}^2 + 1$

よって 最大値 $V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}(\sqrt{2} + 2)^2 + 1 = 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$

最小値 $V\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}(-\sqrt{2} + 2)^2 + 1 = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$



外積 (ベクトル積)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 (ベクトル積) と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し (内積をスカラー積とも言う), その成分は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ. また, その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

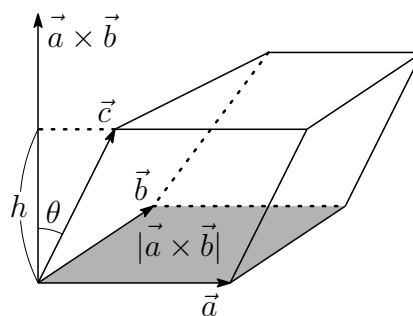
であるから, $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい.

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると, $|\vec{c}| |\cos \theta|$ は, その高さ h であるから, この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また, 対称性により, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ.

- 3** (1) ゲームが終わったときに 1 点となる得点の推移は

$$100, \quad 0100$$

であるから, その確率は

$$\begin{aligned} Q_1 &= p(1-p)^2 + p(1-p)^3 \\ &= p(1-p)^2\{1 + (1-p)\} = p(1-p)^2(2-p) \end{aligned}$$

ゲームが終わったときに 2 点となるとき, 得点の推移は

$$1100, \quad 10100, \quad 01100, \quad 010100$$

であるから, その確率は

$$\begin{aligned} Q_2 &= p^2(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^4 \\ &= p^2(1-p)^2\{1 + 2(1-p) + (1-p)^2\} = p^2(1-p)^2(2-p)^2 \end{aligned}$$

- (2) ゲームが終わったときに n 点となる得点の推移は, n 個仕切り (|) から 0 を置く k 個の選び方に対応する ($k = 0, 1, \dots, n$).

$$|1|1|\cdots|1|100$$

したがって, その確率は

$$\begin{aligned} Q_n &= (1-p)^2 p^n \sum_{k=0}^n {}_n C_k (1-p)^k \\ &= (1-p)^2 p^n \{1 + (1-p)\}^n \\ &= (1-p)^2 \{p(2-p)\}^n \end{aligned}$$

別解 得点が n になる並びについて, 最初の得点が 0 ときはその手前に 1 または 01, 最初の得点が 1 のときはその手前に 1 または 10 を配置することにより, 得点が $n+1$ になる並びが得られるから, 次の漸化式が成立する.

$$Q_{n+1} = \{p + p(1-p)\}Q_n = p(2-p)Q_n$$

$\{Q_n\}$ は, 初項 $Q_1 = (1-p)^2 p(2-p)$, 公比 $p(2-p)$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} Q_n &= (1-p)^2 p(2-p) \{p(2-p)\}^{n-1} \\ &= (1-p)^2 \{p(2-p)\}^n \end{aligned}$$

(3) $0 < x < 1$ とし, 初項 x , 公比 x の無限等比級数を $f(x)$ とすると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

これを微分すると

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(4) (3) の結論から

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1) \quad (*)$$

$$p(2-p) = -(p-1)^2 + 1, \quad 0 < p < 1 \quad \text{より} \quad 0 < p(2-p) < 1$$

(*) を利用すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nQ_n &= \sum_{n=1}^{\infty} nQ_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^2 \{p(2-p)\}^n \\ &= (1-p)^2 p(2-p) \sum_{n=1}^{\infty} n \{p(2-p)\}^{n-1} \\ &= (1-p)^2 p(2-p) \cdot \frac{1}{\{1-p(2-p)\}^2} \\ &= (1-p)^2 p(2-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^4} \\ &= \frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \end{aligned}$$



4 (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ より ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 &= (a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+1}(a_n + a_{n-1}) \quad (n \geq 2) \\ &= -(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2) \end{aligned}$$

$a_1 = 1, a_2 = 1$ より, $a_3 = a_1 + a_2 = 2$ であるから $a_3a_1 - a_2^2 = 1$
 $\{a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2\}$ は公比 -1 の等比数列であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (a_3a_1 - a_2^2) \cdot (-1)^{n-2} = 1 \cdot (-1)^{n-2} = (-1)^n$$

参考 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$
 $a_0 = a_2 - a_1 = 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = A^n$$

$$\text{よって } a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} = |A^n| = |A|^n = (-1)^n$$

(2) $\tan b_n = \frac{1}{a_n}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) &= \frac{\tan b_{2m+1} + \tan b_{2m+2}}{1 - \tan b_{2m+1} \tan b_{2m+2}} = \frac{\frac{1}{a_{2m+1}} + \frac{1}{a_{2m+2}}}{1 - \frac{1}{a_{2m+1}} \cdot \frac{1}{a_{2m+2}}} \\ &= \frac{a_{2m+1} + a_{2m+2}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \end{aligned}$$

(1) の結果から, $a_{2m+2}a_{2m} - a_{2m+1}^2 = (-1)^{2m+1} = -1$ を利用すると

$$\begin{aligned} a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) &= \frac{a_{2m+1}a_{2m} + a_{2m+2}a_{2m}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}a_{2m} + a_{2m+1}^2 - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}(a_{2m} + a_{2m+1}) - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = 1 \end{aligned}$$

- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ を定義域とする関数 $f(x) = \tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域 $0 \leq x < \infty$ に対し, その値域は $0 \leq f^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$ で定められる.

$$\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \frac{1}{a_{2m}} \text{ より } b_{2m+1} + b_{2m+2} = f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m}}\right)$$

また, $b_{2m+2} = f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m+2}}\right)$ であるから

$$b_{2m+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m}}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m+2}}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} &= b_1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+1} \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{a_1}\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m}}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2m+2}}\right) \right\} \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{a_1}\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{a_2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2N+2}}\right) \right\} \end{aligned}$$

$a_1 = a_2 = 1$, $\{a_n\}$ は漸化式より自然数からなる単調増加列であるから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{2N+2}} = 0$$

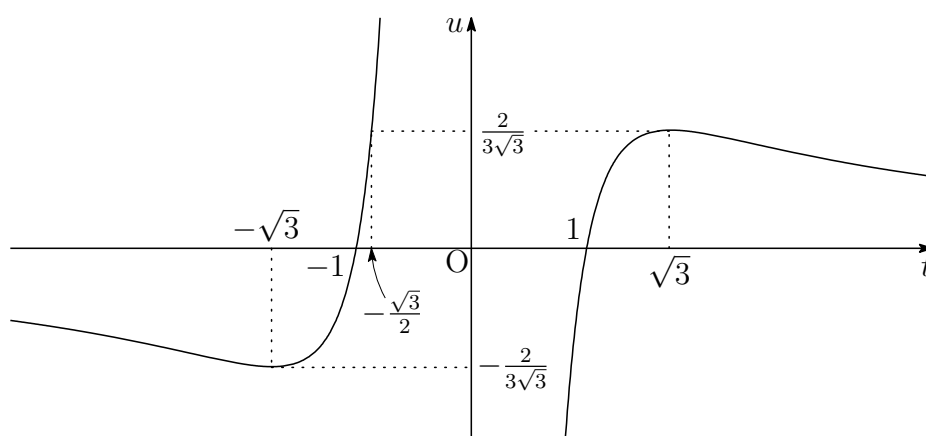
よって $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} = 2f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}$ ■

5 (1) $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}$ より $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4} = \frac{-t^2 + 3}{t^4}$

t	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$

$f(t) = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$ より $\lim_{t \rightarrow -0} f(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = -\infty$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) = 0$



(2) $x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3$ ($xyz \neq 0$) より $x^3(y^2 - 1) = y^3(x^2 - 1)$

$\frac{y^2 - 1}{y^3} = \frac{x^2 - 1}{x^3}$ ゆえに $f(y) = f(x)$

$y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$ ($xyz \neq 0$) より, 同様に $f(z) = f(y)$

$x < y < z$, $f(x) = f(y) = f(z)$ を満たす x, y, z が存在する x の値の範囲を求めればよい. $f(t) = f(\sqrt{3})$ を満たす t ($t \neq \sqrt{3}$) を求めると

$\frac{t^2 - 1}{t^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 整理すると $2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} = 0$

上の第2式は $(t - \sqrt{3})^2$ を因数にもつことに注意して

$(t - \sqrt{3})^2(2t + \sqrt{3}) = 0$ ゆえに $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(\sqrt{3})$

よって, (1) のグラフより $x < -\sqrt{3}, -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ■