令和６年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　令和 6 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

2 実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする．

$$f'(t)=-f(t)g(t),\quad g'(t)=\{f(t)\}^2,$$
$$f(t)>0,\quad |g(t)|<1,\quad f(0)=1,\quad g(0)=0.$$

このとき，

$$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2,\quad q(t)=\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく．

(1) $p'(t)$ を求めよ．

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)$ を求めよ．

(4) $f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ $(0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ．

3 xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(-a,\ 0)$ (ただし $0<a<b$) をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n=1,2,3,\ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

$\boxed{4}$ n を正の整数とし，$C_1, \ldots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で，$k = 1, \ldots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \ldots, 2m) \\ \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \ldots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} Z_{3m}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える．方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

$\mathrm{T}_a\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接ベクトルは　$(1,\ a)$

これを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルは　$\left(-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

S_a の中心を P_a，半径を r_a とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a}=r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

これから

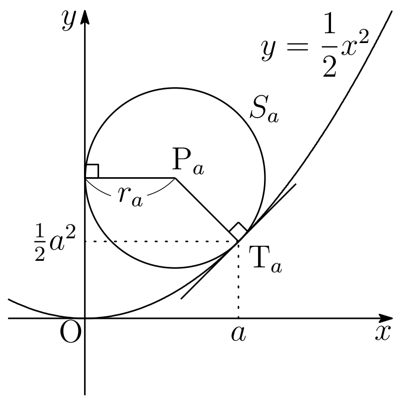
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}&=\overrightarrow{\mathrm{OT}_a}+\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a}\\&=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}$ の x 成分は r_a であるから

$$r_a=a+r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\quad \text{ゆえに}\quad r_a=a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}&=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\\&=\left(a^3+a-a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}a^2\right)\qquad(*)\end{aligned}$$



P は $a=1$ のときの P_a であるから，$(*)$ に $a=1$ を代入して

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\frac{1}{2}}\right)$$

(2) $(*)$ から $\quad C : (x,\ y) = \left(a^3 + a - a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2} - \dfrac{1}{2}a^2\right)$

$$\frac{dx}{da} = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{1+a^2} - \frac{a^3}{\sqrt{1+a^2}}$$
$$\frac{dy}{da} = \sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a$$

点 P における曲線 C の接ベクトルは，上の 2 式に $a = 1$ を代入して

$$\left(\frac{dx}{da},\ \frac{dy}{da}\right) = \left(4 - \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

よって，点 P における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1}{4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}} = \mathbf{1 + \sqrt{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(*)$ $f'(t) = -f(t)g(t)$, $g'(t) = f(t)^2$ より

$$2f'(t)f(t) = -2f(t)^2g(t) = -2g'(t)g(t)$$

したがって $2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) = 0$

これを t について積分すると

$$f(t)^2 + g(t)^2 = C_1 \qquad (C_1\text{は積分定数})$$

$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ より，$C_1 = 1$ であるから

$$(**) \quad p(t) = f(t)^2 + g(t)^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p'(t) = 0}$$

(2) $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$，$g'(t) = -f(t)^2$ から $f(t)^2$ を消去すると

$$g'(t) = 1 - g(t)^2$$

$|g(t)| < 1$ より，$g(t) \neq \pm 1$ に注意して

$$\frac{g'(t)}{1+g(t)} + \frac{g'(t)}{1-g(t)} = 2$$

両辺を t について積分すると

$$\log\left|\frac{1+g(t)}{1-g(t)}\right| = 2t + C_2 \qquad (C_2\text{は積分定数})$$

$|g(t)| < 1$，$g(0) = 0$ より，$C_2 = 0$ であるから

$$q(t) = \log\frac{1+g(t)}{1-g(t)} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad q'(t) = 2$$

したがって，$q'(t)$ は定数である．

(3) (2) の結果から

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)} = e^{2t} \quad \text{ゆえに} \quad g(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}} = \mathbf{1}$

(4) $f'(t) = -f(t)g(t)$ および (3) で求めた $g(t)$ より

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

$f(t) > 0$ に注意して，両辺を t について積分すると

$$\log f(t) = t - \log(1+e^{2t}) + \log C_3 \quad (C_3\text{は積分定数})$$

したがって　$\log f(t) = \log \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$　ゆえに　$f(t) = \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$

$f(0) = 1$ より，$C_3 = 2$ であるから　$f(t) = \dfrac{2e^t}{1+e^{2t}}$

$f(T) = g(T)$ とすると　$\dfrac{2e^T}{1+e^{2T}} = \dfrac{1-e^{2T}}{1+e^{2T}}$

$$2e^T = 1 - e^{2T} \quad \text{ゆえに} \quad e^T = 1+\sqrt{2} \quad \cdots ①$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned} f'(t)^2 + g'(t)^2 &= f(t)^2 g(t)^2 + f(t)^4 \\ &= f(t)^2\{g(t)^2 + f(t)^2\} \\ &= f(t)^2 \end{aligned}$$

求める弧長を L とすると，$f(t) > 0$ であるから

$$L = \int_0^T \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T \frac{2e^t}{1+e^{2t}}\,dt$$

$u = e^t$ とおくと　$\dfrac{du}{dt} = e^t$　① により

t	$0 \longrightarrow T$
u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$

$$L = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$u = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{3}{8}\pi$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \Big[\,2\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$，$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$，$\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}$ とおくと

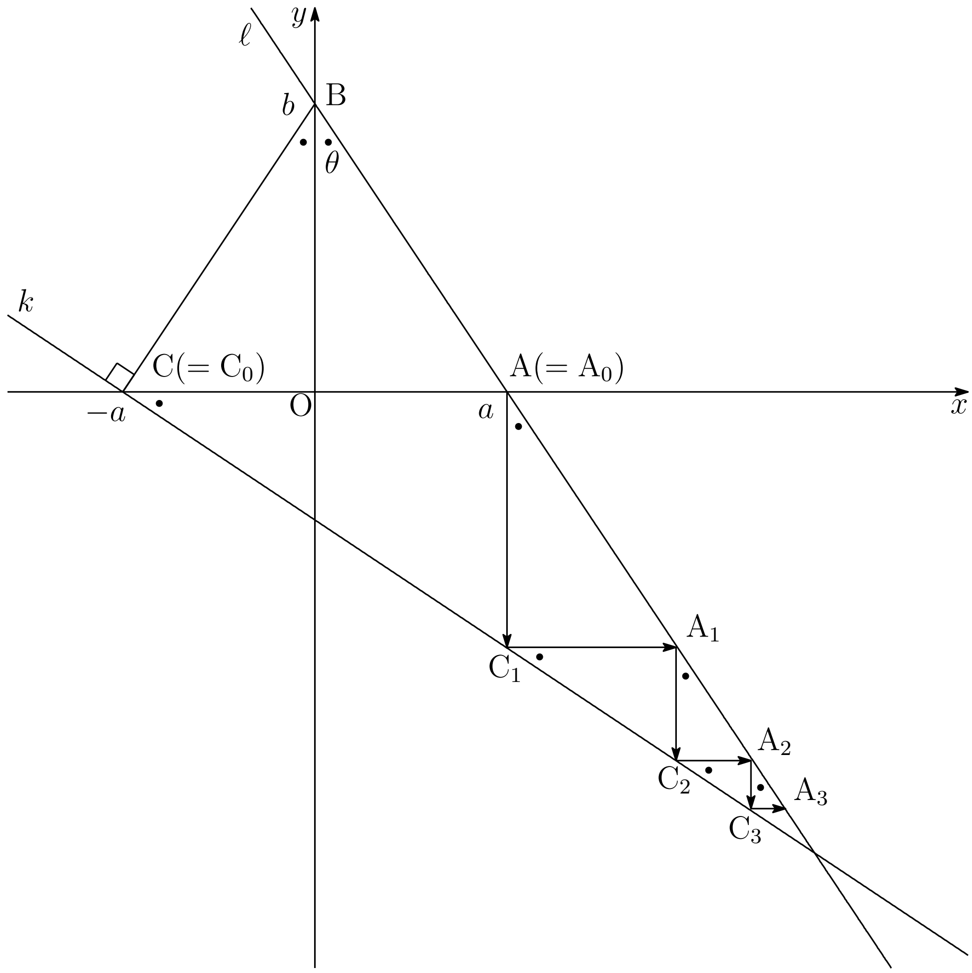
$$\mathrm{C_0A_0} = 2a, \qquad \mathrm{A_0C_1} = \mathrm{C_0A_0}\tan\theta = 2a\tan\theta,$$
$$\mathrm{C_1A_1} = \mathrm{A_0C_1}\tan\theta = 2a\tan^2\theta, \qquad \mathrm{A_1C_2} = \mathrm{C_1A_1}\tan\theta = 2a\tan^3\theta$$

これから

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}} = (2a\tan^2\theta, -2a\tan\theta), \qquad \overrightarrow{\mathrm{C_0C_1}} = (2a, -2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = (\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}} = (\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{C}_n}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}} = (a,\ 0) + \frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a\tan^2\theta, -2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_0} + \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{k+1}} = (-a,\ 0) + \frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a, -2a\tan\theta)$$



前の 2 式について $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} &= (a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(\frac{2a^3}{b^2}, -\frac{2a^2}{b}\right) \\
&= (a,\ 0) + \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(a, -b) \\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right), \\
\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} &= (-a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(2a, -\frac{2a^2}{b}\right) \\
&= (-a,\ 0) + \frac{2ab}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(b, -a) \\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)
\end{aligned}$$

よって，求める座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{A}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{C}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)}$$

(2) 点 A_n の x 座標を x_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle\mathrm{ABC} \times \frac{x_n}{a} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b \times \frac{1}{a}\left\{\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\} \\
&= \boldsymbol{ab\left\{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}}
\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{BC} = \mathrm{BA}$ であるから

$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}} = \frac{x_n}{a} = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$

$0 < a < b$ より，$0 < \dfrac{a}{b} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$X_1 = \frac{1}{3}, \quad X_{n+1} = \frac{2}{3}X_n + \frac{1}{3}(1 - X_n) = \frac{1}{3}X_n + \frac{1}{3}$$

$X_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}\left(X_n - \dfrac{1}{2}\right)$，$X_1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}$ より

$$X_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{X_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}$$

別解 1 成功しない確率を $\overline{X_n}$ とすると

$$X_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_n\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k-1}$$

$$\overline{X_n} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k}$$

$$X_n + \overline{X_n} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n, \quad -X_n + \overline{X_n} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n$$

上の 2 式から $\quad \boldsymbol{X_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)}$

別解 2 次の関数を考える．

$$\varphi_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\{p_k x + (1 - p_k)\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $\varphi_n(x)$ の x^j の係数に等しい．

$\varphi_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{\varphi_n(x) + \varphi_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$ の和である．

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) + \varphi_n(-x)}{2} + \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\varphi_n(1) - \varphi_n(-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1 - 2p_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2\cdot\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} \end{aligned}$$

(2) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$Y_1 = \frac{1}{4}, \quad Y_{n+1} = (1 - p_{n+1})Y_n + p_{n+1}(1 - Y_n)$$

$p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ であるから

$$Y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}Y_n + \frac{1}{2(n+2)} \quad \text{ゆえに} \quad (n+2)Y_{n+1} - (n+1)Y_n = \frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+2)Y_{k+1} - (k+1)Y_k\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}$

したがって $(n+1)Y_n - 2Y_1 = \dfrac{1}{2}(n-1)$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\boldsymbol{Y_n = \dfrac{n}{2(n+1)}}$

別解 次の関数を考える．

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\{p_k x + (1 - p_k)\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $f_n(x)$ の x^j の係数に等しい．
$f_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{f_n(x) + f_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の和である．

$$f_n(x) = \frac{f_n(x) + f_n(-x)}{2} + \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned}
Y_n &= \frac{f_n(1) - f_n(-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1 - 2p_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left\{1 - 2\cdot\frac{1}{2(k+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \boldsymbol{\frac{n}{2(n+1)}}
\end{aligned}$$

(3) 次の関数を考える．

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \{p_k x + (1 - p_k)\} \\
&= \prod_{k=1}^{m} \left\{ \frac{1}{3m} x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\} \prod_{k=m+1}^{2m} \left\{ \frac{2}{3m} x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\} \\
&\qquad \times \prod_{k=2m+1}^{3m} \left\{ \frac{1}{m} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{3m} x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{2}{3m} x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{1}{m} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\}^m
\end{aligned}
$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $g_n(x)$ の x^j の係数に等しい．
$g_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{g_n(x) + g_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の和である．
したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$
\begin{aligned}
Z_{3m} &= \frac{g_n(1) - g_n(-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m \right\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m &= \lim_{m \to \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^{-\frac{3m}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} \\
\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m &= \lim_{m \to \infty} \left\{ \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3m}{4}} \right\}^{-\frac{4}{3}} = e^{-\frac{4}{3}} \\
\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m &= \lim_{m \to \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}} \right\}^{-2} = e^{-2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\lim_{m \to \infty} Z_{3m} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}} e^{-2}\right) = \boldsymbol{\frac{1 - e^{-4}}{2}}
$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = x^2 + ax + b$

$f(x) = 0$ のすべて解 α について，$\alpha^n = 1$ より (n は整数)

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha| = 1$$

(i) $f(x) = 0$ が実数解をもつとき，$f(x) = 0$ の解 $\alpha,\ \beta$ は

$$\alpha = \pm 1,\ \beta = \pm 1 \quad (\text{複号任意})$$

解と係数の関係により　$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$

したがって　$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (-2,\ 1),\ (0, -1)$

(ii) $f(x) = 0$ が虚数解 $\alpha,\ \overline{\alpha}$ をもつとき，解と係数の関係により

$$\alpha + \overline{\alpha} = -a, \quad \alpha\overline{\alpha} = b \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(\alpha) = -\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2 = b$$

$|\alpha| = 1,\ -1 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ であるから

$$b = 1, \quad -1 < -\frac{a}{2} < 1$$

a は整数であるから　$a = -1,\ 0,\ 1$

- $(a,\ b) = (-1,\ 1)$ のとき，$x^2 - x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

- $(a,\ b) = (0,\ 1)$ のとき，$x^2 + 1 = 0$ を解いて

$$x = \pm i = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$$

- $(a,\ b) = (1,\ 1)$ のとき，$x^2 + x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{(a,\ b) = (\pm 2,\ 1),\ (\pm 1,\ 1),\ (0, \pm 1)}$ ■