令和５年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　令和５年２月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}\,dx$ の整数部分を求めよ．

2 方程式

$$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

3 実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\sqrt{3}}$ から，無作為に 2 枚のカードを順に選び，出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える．正の整数 n に対して，この操作を n 解繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す．

(1) $|z_n|<5$ となる確率 P_n を求めよ．

(2) ${z_n}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ．

4 xyz 空間において，x 軸を軸とする半径 2 の円柱から，$|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする．また，A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする．A と B の共通部分の体積を求めよ．

5 xyz 空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1) 2 直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2) 4 直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $I=\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2023$ のとき，$\dfrac{2}{x+e^x} \leqq \dfrac{2}{e^x}$ より

$$I \leqq \int_0^{2023}\frac{2}{e^x}\,dx=\int_0^{2023}2e^{-x}\,dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^{2023}=2-\frac{2}{e^{2023}}<2$$

$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$ とおき $(x \geqq 0)$，$(x+e^x)f(x)=2$ を微分すると

$$(1+e^x)f(x)+(x+e^x)f'(x)=0 \tag{1}$$

これをさらに微分すると

$$e^xf(x)+2(1+e^x)f'(x)+(x+e^x)f''(x)=0 \tag{2}$$

(1)，(2) から $f'(x)$ を消去すると

$$\begin{aligned}(x+e^x)^2f''(x)&=\{e^{2x}+(4-x)e^x+2\}f(x)\\&=\{e^x(e^x-x-1)+5e^x+2\}f(x)>0\end{aligned} \tag{3}$$

$(1+e)f(1)=2$ であるから，$x=1$ を (1) に代入すると

$$2+(1+e)f'(1)=0 \quad ゆえに \quad f'(1)=-\frac{2}{1+e}$$

$C: y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 $\ell: y=g(x)$ の方程式について

$$\begin{aligned}g(x)&=f'(1)(x-1)+f(1)\\&=-\frac{2}{1+e}(x-1)+\frac{2}{1+e}=-\frac{2}{1+e}(x-2)\end{aligned}$$

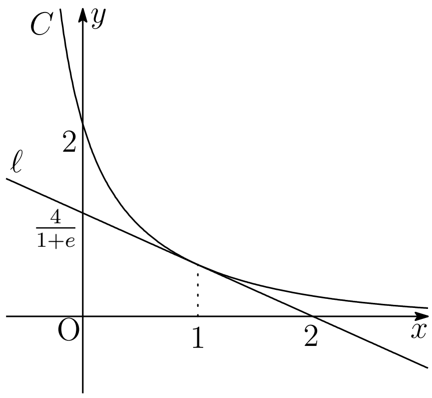
(3) より，$x \geqq 0$ において

$$f(x) \geqq g(x)$$

ℓ と x 軸，y 軸で囲まれ部分の面積から

$$I>\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{1+e}>\frac{1+e}{1+e}=1$$

$1<I<2$ より，I の整数部分は　**1**



別解 $g(x)=\dfrac{x+e^x}{e^x}=xe^{-x}+1$ とおくと　$g'(x)=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$e^{-1}+1$	$\searrow$

これから　$\dfrac{x+e^x}{e^x}\leqq e^{-1}+1$　ゆえに　$x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$

$0\leqq x\leqq 2023$ のとき，$e^x\leqq x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$ より

$$\frac{2e}{e+1}\int_0^{2023}e^{-x}\,dx\leqq\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx\leqq 2\int_0^{2023}e^{-x}\,dx \qquad (*)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{2023}e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{2023}=1-e^{-2023}$

$1-e^{-2}<1-e^{-2023}<1$ であるから，上式および $(*)$ より

$$\frac{2e}{e+1}(1-e^{-2})<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2\cdot1$$
$$2-\frac{2}{e}<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$$

$1<1+\dfrac{e-2}{e}=2-\dfrac{2}{e}$ より　$\displaystyle 1<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$

よって，求める整数値は　**1**　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ より　$(|x|^3-|x|)^2(y^3-y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$f(n)=n^3-n$ とおくと　　$f(|x|)^2f(y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2 \quad \cdots(*)$

$f(n)=n^3-n=(n-1)n(n+1)$ であるから，$f(y) \geqq 2{\cdot}3$ より

$$f(|x|)^2 \leqq \frac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{2{\cdot}3} \quad \text{ゆえに} \quad f(|x|) \leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

$f(n) \leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$ を満たす自然数 n で，$f(n)$ が 2，3，5 の因数からなるものは

$$n \geqq 9 \text{ のとき} \quad f(n) \geqq f(9)=8{\cdot}9{\cdot}10=2^4{\cdot}3^2{\cdot}5>2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

に注意すると，次の 4 つである．$f(6)$，$f(7)$，$f(8)$ は 7 を因数にもつから不適．

n	2	3	4	5
$f(n)$	$2{\cdot}3$	$2^3{\cdot}3$	$2^2{\cdot}3{\cdot}5$	$2^3{\cdot}3{\cdot}5$
$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(n)^2}$	$2^5{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2^3{\cdot}3$	$2{\cdot}3$

上の表から　　$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(4)^2}=f(3)$，　$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(5)^2}=f(2)$

したがって　　$f(4)^2f(3)=f(5)^2f(2)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組は，$f(y)>0$ であるから，$y \geqq 2$ により

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm4,\ 3),\ (\pm5,\ 2)}$$

■

3 (1) 1回の操作で得られる複素数は，次の6通りで同様に確からしい．

$$w_1=1,\ w_2=\sqrt{3},\ w_3=i,\ w_4=\sqrt{3}i,\ w_5=\sqrt{3}+i,\ w_6=1+\sqrt{3}i$$

このとき　$|w_1|^2=|w_3|^2=1$，$|w_2|^2=|w_4|^2=3$，$|w_5|^2=|w_6|^2=4$
また，$3^2<3{\cdot}4<4^2<25<3^3$であるから，$|z_n|<5$，すなわち，$|z_n|^2<25$となる確率P_nは，n回の操作のうち，w_1またはw_3が$n-2$回以上出る確率であるから

$$\begin{aligned}P_n&=\sum_{k=n-2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{6}\right)^k\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k}\\&=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\boldsymbol{\frac{2n^2+1}{3^n}}\end{aligned}$$

(2) ${w_1}^2$〜${w_6}^2$の偏角について

$$\arg{w_1}^2=\arg{w_2}^2=0,\quad \arg{w_3}^2=\arg{w_4}^2=\pi,$$
$$\arg{w_5}^2=\frac{\pi}{3},\quad \arg{w_6}^2=\frac{2\pi}{3}$$

$\arg{z_n}^2=\dfrac{\pi}{3}+l\pi$，$\arg{z_n}^2=\dfrac{3\pi}{3}+m\pi$となる確率をそれぞれ$R_n$，$S_n$とすると($l$，$m$は整数)，次の確率漸化式が成立する($n$は正の整数)．

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{4}{6},\ R_1=S_1=\frac{1}{6}\\Q_{n+1}&=\frac{4}{6}Q_n+\frac{1}{6}R_n+\frac{1}{6}S_n\\R_{n+1}&=\frac{1}{6}Q_n+\frac{4}{6}R_n+\frac{1}{6}S_n\\S_{n+1}&=\frac{1}{6}Q_n+\frac{1}{6}R_n+\frac{4}{6}S_n\end{aligned}$$

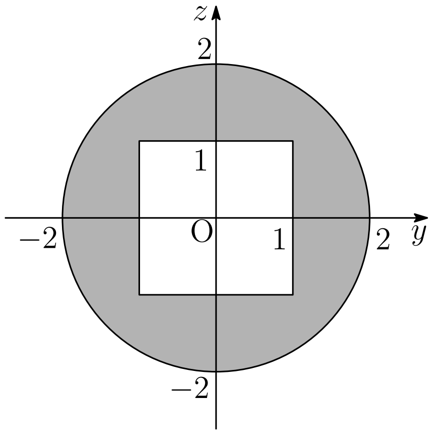
これから　$Q_{n+1}-R_{n+1}=\dfrac{1}{2}(Q_n-R_n)$，$R_{n+1}-S_{n+1}=\dfrac{1}{2}(R_n-S_n)$

ゆえに　$Q_n-R_n=(Q_1-R_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^n}$

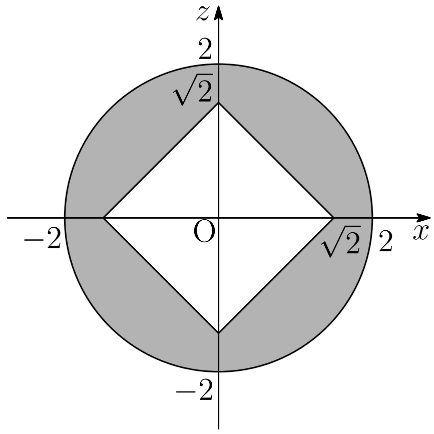
$R_n-S_n=(R_1-S_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

上の2式と$Q_n+R_n+S_n=1$より　$\boldsymbol{Q_n=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$ ■

4 A の yz 平面への正射影および B の zx 平面への正射影は次のようになる．



A の yz 平面への正射影



B の zx 平面への正射影

A の表す領域は　$|z| \leqq 1$ のとき　$1 \leqq |y| \leqq \sqrt{4-z^2}$

　　　　　　　　$1 \leqq |z| \leqq 2$ のとき　$|y| \leqq \sqrt{4-z^2}$

B の表す領域は　$|z| \leqq \sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}-|z| \leqq |x| \leqq \sqrt{4-z^2}$

　　　　　　　　$\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2$ のとき　$|x| \leqq \sqrt{4-z^2}$

これから，関数 $f(z)$，$g(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-1) & (|z| \leqq 1) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (1 \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+|z|) & (|z| \leqq \sqrt{2}) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

求める立体の体積を V とすると，$f(z)$，$g(z)$ が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} f(z)g(z)\,dz = 2\int_0^2 f(z)g(z)\,dz \\ &= 8\int_0^1 (\sqrt{4-z^2}-1)(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz + 8\int_{\sqrt{2}}^2 (4-z^2)\,dz \\ &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz + 8\int_0^1 (-\sqrt{4-z^2}+\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_0^{\sqrt{2}} (-\sqrt{2}\sqrt{4-z^2}+z\sqrt{4-z^2})\,dz \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^2 (4-z^2)\,dz = \left[\ 4z - \frac{z^3}{3}\ \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$
$$\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz = \left[\ \sqrt{2}z - \frac{z^2}{2}\ \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$
$$\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz = \left[\ -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，$z = \sin\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sin\alpha} \sqrt{4-z^2}\,dz &= \int_0^{\alpha} 4\cos^2\theta\,d\theta = \left[\ 2\theta + \sin 2\theta\ \right]_0^{\alpha} \\ &= 2\alpha + \sin 2\alpha\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4}$ とすると

$$\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} + 1$$

よって

$$\begin{aligned}V &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz - 8\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad - 8\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz \\ &= 8\cdot\frac{16}{3} - 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - 8\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + 8\left(\frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{60 - \frac{8\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\pi}\end{aligned}$$

■

5 (1) 点 P$(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 AB，BC にそれぞれ垂線 PH$_1$，PH$_2$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\frac{x+z}{2},\ 1,\ \frac{x+z}{2}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \left(x-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_2P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \left(\frac{x-z}{2},\ y-1, -\frac{x-z}{2}\right)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2$ であるから

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 &= (y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 \\ 2\{(x-1)^2-(y-1)^2\} + (y-z)^2 - (x-z)^2 &= 0 \\ 2(x-y)(x+y-2) - (x-y)(x+y-2z) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2z-4) &= 0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

よって　　**2 平面 $\boldsymbol{x-y=0,\ x+y+2z-4=0}$**

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 CD，DA にそれぞれ垂線 PH$_3$，PH$_4$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \left(-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} = (x,\ 0,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_3P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \left(x+1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_4P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = (0,\ y,\ z)$$

球面の中心を P，半径を R とすると，次を満たせばよい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2 = R^2 \qquad (*)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2$ より　$(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2 = y^2 + z^2$

$$(\sqrt{2}x + y - z + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - y + z + \sqrt{2}) = 0 \quad \cdots ②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2$ より　$(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(y-z)^2 = (x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2$

$$x = -\frac{1}{2}yz \quad \cdots ③$$

③ を ①，② にそれぞれ代入することにより

$$y(y-4)(z+2)(z-2) = 0$$
$$(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0$$

$(*)$ を満たすとき，次を解けばよい．

$$\begin{cases} y(y-4)(z+2)(z-2) = 0 \\ (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2}yz \\ R^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

上の第 1 式と第 2 式から

$$y = 0,\ 4 \text{ のとき } z = \pm\sqrt{2},\quad y = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } z = \pm 2$$

これらを第 3 式と第 4 式に代入して

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{(0,\ 0, \pm\sqrt{2}),\quad R = \sqrt{2}} \\ &\boldsymbol{(\mp 2\sqrt{2},\ 4, \pm\sqrt{2}),\quad R = 3\sqrt{2}} \\ &\boldsymbol{(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2},\ 2),\quad R = \sqrt{6}} \\ &\boldsymbol{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -2),\quad R = \sqrt{6}} \end{aligned} \qquad \text{(複号同順)}$$

■