令和４年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　令和４年２月25日

問題 1 2 3 4 5

1 $a,\ b$ を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする．$a,\ b$ が

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

2 3 つの正の整数 $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b+c,\ bc+ca+ab,\ abc$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2) $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

3 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a) 時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である．

(b) 点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2) 時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3) xy 平面内において，連立不等式

$$x^2-x+y^2<0, \quad x^2+y^2-y<0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

$\boxed{4}$ a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．

(2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{5}$ a は $0<a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式 $(*)$ を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$(*) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 $b,\ c$ について，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の試行を考える．

［試行］n 個の数 $1, 2, \cdots, n$ を出目とする．あるルーレットを k 回まわす．

この［試行］において，各 $i=1,2,\cdots,n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし，

$$(**) \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(4) (3) の［試行］において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n,k}$ とする．$(**)$ が成り立つとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(z)=z^2+az+b$ について $(|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1)$，$f(z)=0$ の解は

$$z=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

(i) $a^2-4b \geqq 0$ のとき，2 つの実数解を

$$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

とおく．まず，a を固定すると，$-1 \leqq b \leqq 1$ より

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2} \leqq \alpha \leqq -\frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leqq \beta \leqq \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

これらの解は，閉区間 $\left[\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2},\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$ にある．

$-1 \leqq a \leqq 1$ より，閉区間 $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ である．

(ii) $a^2-4b<0$ のとき，2 つの虚数解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から

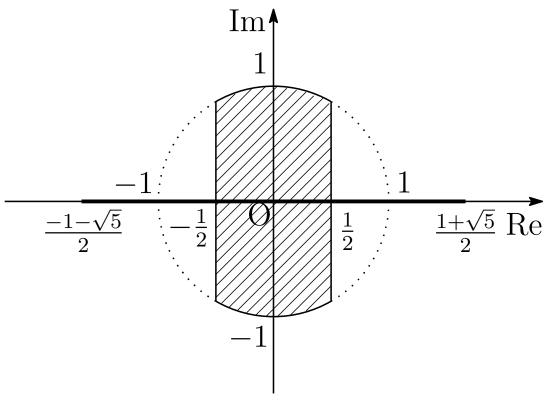
$$\alpha+\overline{\alpha}=-a, \quad \alpha\overline{\alpha}=b \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2=b$$

このとき，$-1 \leqq a \leqq 1$，$0<b \leqq 1$ に注意して

$$-\frac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(\alpha) \leqq \frac{1}{2}, \quad |\alpha|^2 \leqq 1 \quad (|\alpha| \leqq 1)$$

したがって $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2},\ |z| \leqq 1$

(i)，(ii) より，z のとりうる値の範囲は，次の境界線を含む領域である．



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ とおくと，a, b, c を解とする 3 次方程式は

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

A, B, C が 1 以外の素数 p を因数にもつと仮定する (背理法).

a はこの方程式の解であるから

$$a^3=Aa^2-Ba+C$$

上式の右辺は p を因数にもつから，左辺 a^3 は p を因数にもつ，すなわち，a は p を因数にもつ．同様の議論により，b, c も p を因数にもつ．
これから，p は a, b, c の公約数となり，条件に反する．

別証 $A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$ とおき，A, B, C が素数 p を因数にもつと仮定する (背理法).

C が p を因数にもつから，a, b, c の少なくとも 1 つが p を因数もつ．
一般性を失うことなく，a が p を因数にもつと

$$b+c=A-a, \quad bc=B-a(b+c)$$

上の 2 式の右辺は，ともに p を因数にもつから，$b+c$, bc は，p を因数もつ．

bc が p を因数にもつと，b, c の一方が p を因数もち，b が p を因数にもつとすれば，$c=(b+c)-b$ より，c も p を因数にもつ．
これから，p は a, b, c の公約数となり，条件に反する．

(2) $D = a^2 + b^2 + c^2,\ E = a^3 + b^3 + c^3$ とおくと

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= A^2 - 2B \\ E &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\} + 3abc \\ &= A(A^2 - 3B) + 3C \end{aligned}$$

ゆえに　$(*)$　$2B = A^2 - D,\quad 3C = E - A(A^2 - 3B)$

$A,\ D,\ E$ が素数 q $(q \geqq 5)$ を因数にもつと仮定すると，$(*)$ の第 1 式から，B は q を因数にもつ．これを $(*)$ の第 2 式に適用すると，C も q を因数にもつ．このとき，$A,\ B,\ C$ が素数 q を因数にもち，条件に反する．

したがって，$A,\ D,\ E$ の最大公約数は $2^m 3^n$ (m ,n は 0 以上の整数) と表される．$(*)$ より，$2B,\ 3C$ は $2^m 3^n$ で割り切れるから，$m \geqq 2,\ n \geqq 2$ のとき，A は $2^m 3^n$ で割り切れ，B は $2^{m-1} 3^n$ で割り切れ，C は $2^m 3^{n-1}$ で割り切れる．このことは，$A,\ B,\ C$ の最大公約数が 1 であることに反する．

$A,\ D,\ E$ の最大公約数を G とすると

$$G \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

に絞られる．これら G の存在をすべて示せば十分である．

a	b	c	A	D	E	G
1	1	1	3	3	3	3
1	1	2	4	6	10	2
1	1	3	5	11	29	1
1	1	4	6	18	66	6

よって，求める最大公約数となる正の整数は　**1，2，3，6**　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) AB を直径とする円を C_t とする．
$\angle \mathrm{P} = \dfrac{\pi}{2}$ より，P は C_t 上にある．
円周角の定理により

$$\angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{BAP}$$

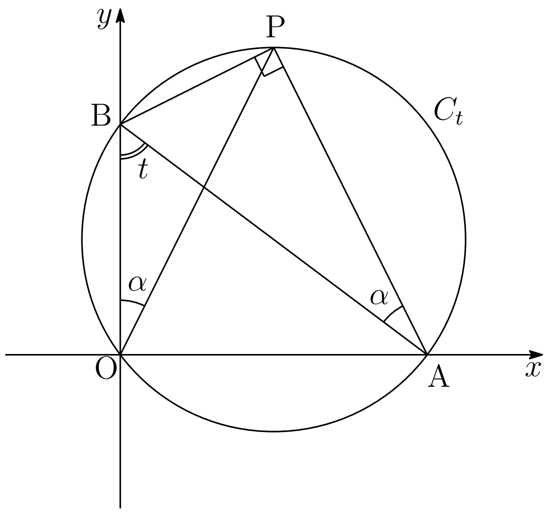
ゆえに　$\angle \mathrm{BOP} = \alpha$

直線 OP の偏角は　$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

直線 OP の方程式は

$$y = x \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

よって　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{\tan \alpha}}$



(2) $\angle \mathrm{OBP} = t + \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha - t)$

$\triangle$OBP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin \angle \mathrm{OBP}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP} = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha - t)\right\} = \cos(\alpha - t)$$

$f(t) = \mathrm{OP}$ とおくと，$f(t)$ は $t = 0$ から $t = \alpha$ まで単調増加，
$t = \alpha$ から $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで単調減少である．

$$f(0) = \cos \alpha, \quad f(\alpha) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

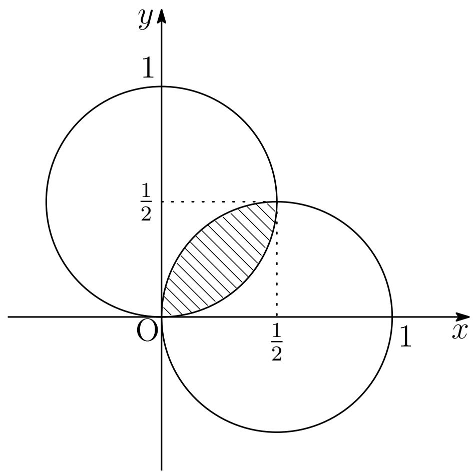
よって，点 P が動く道のりを L とすると

$$\begin{aligned} L &= \{f(\alpha) - f(0)\} + \left\{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 1 - \cos \alpha + (1 - \sin \alpha) = \boldsymbol{2 - \sin \alpha - \cos \alpha} \end{aligned}$$

(3) 与えらた連立不等式から

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

これを満たす領域 D は右の図の斜線部分である(境界線を含まない)．2点O，Pを通る直線を ℓ とし，ℓ と D の境界線の交点をQとする．



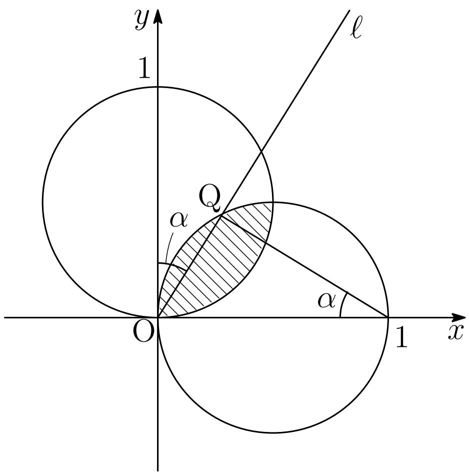
(i) $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\sin\alpha \leqq \cos\alpha = f(0) < f(t) = \mathrm{OP}$$

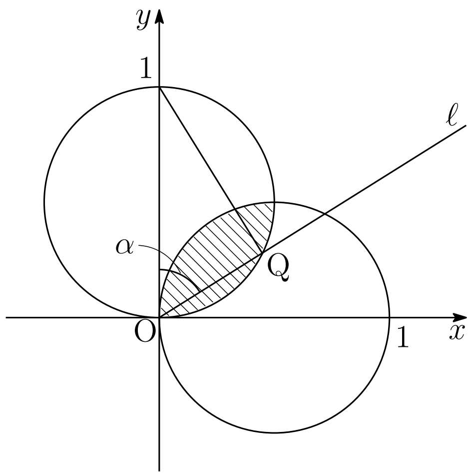
(ii) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\cos\alpha \leqq \sin\alpha = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(t) = \mathrm{OP}$$

(i)，(ii) より，点Pは領域 D には入らない．



$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$



$\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{4}$ (1) $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ より　$(2w+1)z=w+3$　$w\neq-\dfrac{1}{2}$ であるから　$z=\dfrac{w+3}{2w+1}$

これを $|z-1|=a$ に代入すると

$$\left|\frac{w+3}{2w+1}-1\right|=a \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{-w+2}{2w+1}\right|=a \qquad (*)$$

上の第 2 式より　$|w-2|^2=a^2|2w+1|^2$

$$(4a^2-1)|w|^2+2(a^2+1)(w+\overline{w})+a^2-4=0$$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{Re}(w)=\dfrac{w+\overline{w}}{2}=\dfrac{3}{4}$ となり，w は直線を表す．

$a\neq\dfrac{1}{2}$ のとき　$|w|^2+\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}(w+\overline{w})+\dfrac{a^2-4}{4a^2-1}=0$

$$\left|w+\frac{2(a^2+1)}{4a^2-1}\right|^2=\frac{25a^2}{(4a^2-1)^2}$$

したがって，K が円である条件は　$\boldsymbol{a\neq\dfrac{1}{2}}$ **かつ** $\boldsymbol{a>0}$

K の中心 $\boldsymbol{-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{5a}{|4a^2-1|}}$

別解 $a\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ より　$|w-2|:|w+\frac{1}{2}|=2a:1$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，K は 2 点 $2,-\dfrac{1}{2}$ の垂直二等分線 $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{3}{4}$

K は 2 点 $2,-\dfrac{1}{2}$ を $2a:1$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{1\cdot2+2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a+1},\quad \frac{-1\cdot2+2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a-1},\quad \text{すなわち}\quad \frac{2-a}{2a+1},\quad \frac{-2-a}{2a-1}$$

を直径の両端とする円である．

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-a}{2a+1}+\dfrac{-2-a}{2a-1}\right)=-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2-a}{2a+1}-\dfrac{-2-a}{2a-1}\right|=\dfrac{5a}{|4a^2-1|}$

(2) (1) の結果から，2 点 $-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}+\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$, $-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}-\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$ を結ぶ線分が通過する領域である．その領域を表す点を $x+yi$ とすると

$$x=-\frac{2(a^2+1)}{4a^2-1}, \quad |y| \leqq \frac{5a}{|4a^2-1|}$$

上の第 1 式から　$a^2=\dfrac{x-2}{2(2x+1)}>0$　ゆえに　$x<-\dfrac{1}{2},\ 2<x$

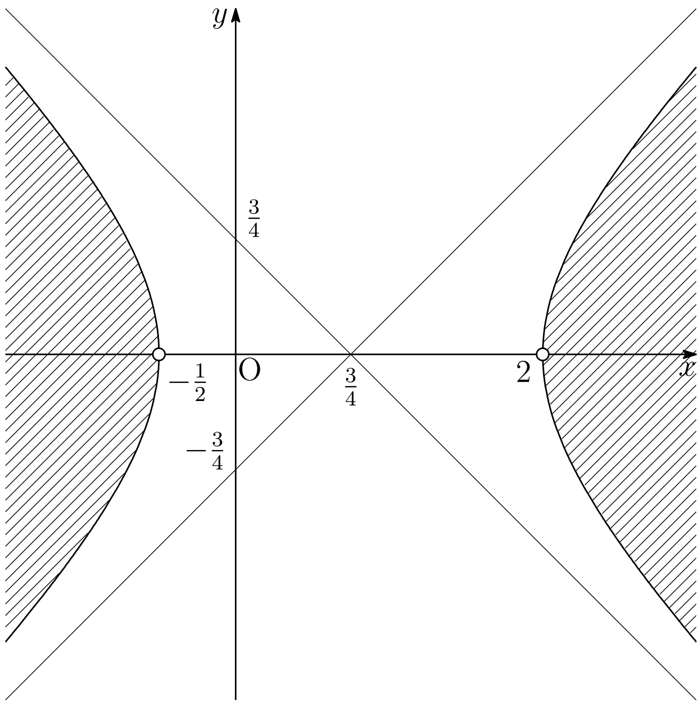
$x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4a^2-1}$ より　$-\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4a^2-1},\ \dfrac{2}{5}|y| \leqq \dfrac{2a}{4a^2-1}$

$$\left(\frac{2}{5}|y|\right)^2-\left\{\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 \leqq \frac{4a^2}{(4a^2-1)^2}-\frac{1}{(4a^2-1)^2}=\frac{1}{4a^2-1}$$

したがって　$\dfrac{4}{25}y^2-\dfrac{4}{25}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq -\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

以上の結果から　$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-y^2 \geqq \dfrac{25}{16},\ x \neq -\dfrac{1}{2},\ 2$

求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，○は含まない．



$\boxed{5}$ (1) $f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ より　$f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\sin 2ax$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sin 2ax\right)dx\\ &= \left[\frac{2}{3}x-\frac{1}{3a}\cos 2ax\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{3a}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$ が成立するとき

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{3a}=1 \quad \text{ゆえに} \quad a+\cos 2a-1=0 \qquad (*)$$

$g(a)=a+\cos 2a-1$ とおくと　$g'(a)=1-2\sin 2a$

$0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における $g(a)$ の増減表は

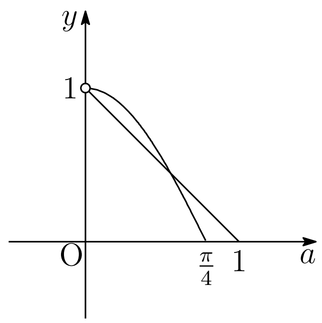
a	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}-1$

$\dfrac{\pi}{4}-1<0$ であるから，$(*)$ を満たす a がただ1つ存在する．

別解 $0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において

$$\cos 2a=-a+1 \qquad \text{(A)}$$

が満たす a がただ1つ存在することを示してもよい．$0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$y=\cos 2a$ と $y=-a+1$ のグラフをかくと，右の図から，(A) を満たす a がただ1つ存在する．



(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから，$0\leqq b<c\leqq 1$ について

$$f(b)\leqq f(x)\leqq f(c) \qquad (b\leqq x\leqq c)$$

$\displaystyle\int_b^c f(b)\,dx\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq\int_b^c f(c)\,dx$ により，次式が成立する．

$$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq f(c)(c-b)$$

(3) 定義から $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_{n,k,i} = k$ ゆえに $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$

上の第 2 式および $(**)$ が成立するとき

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$$

(4) $S_{n,k,i}$ を用いて $\displaystyle A_{n,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} iS_{n,k,i} = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k}$

$(**)$ を適用すると

$$A_n = \lim_{k\to\infty} A_{n,k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k} = \sum_{i=1}^{n} i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \qquad \text{(A)}$$

ここで，$b = \dfrac{i-1}{n}$，$c = \dfrac{i}{n}$ を (2) に代入した不等式を用いると

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$
$$\frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

(A) より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq A_n \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 xf(x)\,dx$ であるから，

はさみうちの原理により

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} &= \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin 2ax\right)\,dx \\ &= \left[\,\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3a}\cos 2ax + \frac{1}{6a^2}\sin 2ax\,\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3} - \frac{\cos 2a}{3a} + \frac{\sin 2a}{6a^2}}\end{aligned}$$

■