令和３年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　令和３年２月 25 日

$\boxed{1}$ 正の整数に関する条件

(∗)　10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (∗) を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

$\boxed{2}$ xy 平面上の楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を実数とする．直線 $\ell : y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための $a,\ b$ の条件を求めよ．

(2) 実数 $a,\ b,\ c$ に対して，直線 $\ell : y = ax + b$ と直線 $m : y = ax + c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b > c$ とする．直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ．

(3) 楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ．

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F = M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ xy 平面上の円 $C : x^2 + (y-a)^2 = a^2\ (a>0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2) 円 C が $y \geqq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) の範囲にあるとする．xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\quad y \geqq x^2 - x^4,\quad x^2 + (y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満で条件 $(*)$ を満たす数は，最高位の k 桁の数は 1〜8 の 8 通りで，他の 1 桁から $k-1$ 桁の数は 0〜8 の 9 通りであるから

$$\boldsymbol{a_k = 8{\cdot}9^{k-1}}$$

(2) j を k 以下の自然数とし，10^{j-1} 以上かつ 10^j 未満で条件 $(*)$ を満たす整数の集合を U_j とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{n \in U_j} \frac{1}{n} \\
&\leqq \sum_{j=1}^{k} \sum_{n \in U_j} \frac{1}{10^{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{10^{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{8{\cdot}9^{j-1}}{10^{j-1}} \\
&= 8 \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} = 8 \times \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}} \\
&= 80 \left\{ 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k \right\} < 80
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と $\ell : y = ax + b$ を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ縮小した図形はそれぞれ $E' : x^2 + y^2 = 1$，$\ell' : y = 2ax + b$ である．
E と ℓ が異なる 2 点を共有するとき，E' と ℓ' も異なる 2 点を共有するから

$$\frac{|b|}{\sqrt{(2a)^2+1}} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b^2 < 4a^2 + 1}$$

(2) $m : y = ax + c$ を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ縮小した図形は

$$m' : y = 2ax + c$$

である．条件を満たすとき，ℓ'，m' が E' と異なる 2 点で交わり，その弦の長さが等しいから

$$\frac{|b|}{\sqrt{(2a)^2+1}} = \frac{|c|}{\sqrt{(2a)^2+1}} < 1$$

$b > c$ であるから，求める条件は

$$\boldsymbol{c = -b, \quad b^2 < 4a^2 + 1}$$

(3) (2) の結果から，$\ell : y = ax + b$ と $m : y = ax - b$ は原点に関して対称であり，楕円 $E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ も原点に関して対称である．また，(2) の 4 点 P，Q，S，R が正方形の頂点となるとき，これらの頂点を

$$\mathrm{P}(-v,\ u),\quad \mathrm{Q}(u,\ v),\quad \mathrm{S}(-u, -v),\ \mathrm{R}(v, -u)$$

とすると $(u, v > 0)$

$$u = -av + b,\quad v = au + b,\quad \frac{u^2}{4} + v^2 = 1,\quad \frac{v^2}{4} + u^2 = 1$$

上の第 3 式および第 4 式から　$u = v = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

これを第 1 式および第 2 式に代入すると　$a = 0,\ b = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また，直線 PQ および直線 SR が y 軸に平行な場合も上の 4 頂点とみなしてよい．よって，求める 4 頂点は

$$\boldsymbol{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 正の整数 n に対して

$$
\begin{aligned}
n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n &= (n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= (n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = (n+1){}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}
\end{aligned}
$$

n と $n+1$ は互いに素であるから，上式より，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である．

(2) 正の整数 n に対して，$n \geqq 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2n-k}{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n(2n-1)\cdots(n+3)(n+2)(n+1)}{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1} \\
&= (n+2)\cdot\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+3)}{(n-1)(n-2)\cdots3} \\
&= (n+2)\prod_{k=1}^{n-3}\frac{2n-k}{n-k} > n+2
\end{aligned}
$$

(3) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ より (a_n はカタラン数[1])

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2} = \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}a_n \qquad (*)
\end{aligned}
$$

したがって　$(n+2)a_{n+1} = (4n+2)a_n \qquad (**)$

$(*)$ から　$a_{n+1} > a_n \quad \cdots ①$

また，(2) の結果を $(*)$ に適用すると，$n \geqq 4$ のとき

$$a_{n+1} > \frac{4n+2}{n+2}\cdot(n+2) = 4n+2 \quad \cdots ②$$

a_{n+1} $(n \geqq 4)$ が素数のとき，$(**)$ より，a_{n+1} は $4n+2$ または a_n の素因数となるが，①，② より，a_{n+1} が $4n+2$ または a_n の素因数にはならない．

a_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ について，求めると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 14 = 2\cdot7$$

よって，a_n が素数となる正の整数 n は　$\boldsymbol{n = 2,\ 3}$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2008_kouki.pdf (p.6 参照)

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) 3点A，B，C，Dは原点Oを中心とする半径1の球面上の点であるから

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1, \quad |\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1, \quad |\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1, \quad |\vec{d}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 1$$

$F = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$ より

$$\begin{aligned}
F &= 2\{|\vec{b}-\vec{a}|^2 + |\vec{c}-\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{c}|^2\} - 3\{|\vec{d}-\vec{a}|^2 + |\vec{d}-\vec{b}|^2 + |\vec{d}-\vec{c}|^2\} \\
&= 4(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a}) \\
&\qquad\qquad - 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 3|\vec{d}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}) \\
&= 4(3 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a}) - 3(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}) \\
&= -4(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 6(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}) - 6 \\
&= -2\{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}\} + 6(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} \\
&= -2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) + 6(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} \\
&= -2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{k = -2}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$の重心を$\mathrm{G}(\vec{g})$とすると　$\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\vec{g}$は球Sの内部にあるから　$|\vec{g}| \leqq 1$

したがって，(1)の結果から

$$\begin{aligned}
F &= -2\cdot3\vec{g}\cdot(3\vec{g} - 3\vec{d}) = -18(\vec{g}\cdot\vec{g} - \vec{d}\cdot\vec{g}) \\
&= -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}|\vec{d}|^2 = -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$|\vec{g}| = \dfrac{1}{2}$のとき，$\vec{d} = 2\vec{g}$とすると，このとき，Fは最大値$\dfrac{9}{2}$をとる．

よって　$\boldsymbol{M = \dfrac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，$F=M$ となるとき，$\vec{d}=2\vec{g}$ であるから

$$\vec{d}=2\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad ゆえに \quad \vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}$$

$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 0)$ より　$\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{7}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$

したがって　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2+0^2=4$

$$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4 \quad ゆえに \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{1\cdot 1}=1 \quad すなわち \quad \theta=0,\quad \vec{a}=\vec{b}$$

したがって　$\vec{a}=\vec{b}=\left(\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ の中心を $\mathrm{A}(0,\ a)$，点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$ とすると $(a>0)$

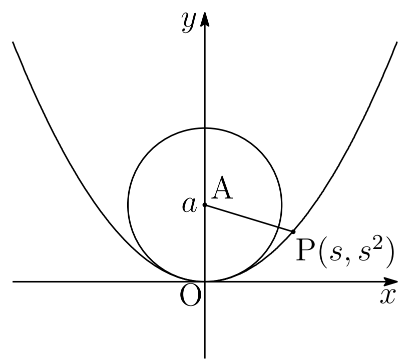
$$\mathrm{AP}^2=s^2+(s^2-a)^2$$

であるから，$t=s^2$，$f(t)=\mathrm{AP}^2$ とおくと

$$f(t)=t+(t-a)^2=\left(t-a+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4} \quad (t\geqq 0)$$

条件を満たすとき，$f(t)$ は $t=0$ で最小でなければならないから

$$a-\frac{1}{2}\leqq 0 \quad よって \quad \boldsymbol{0<a\leqq\frac{1}{2}}$$

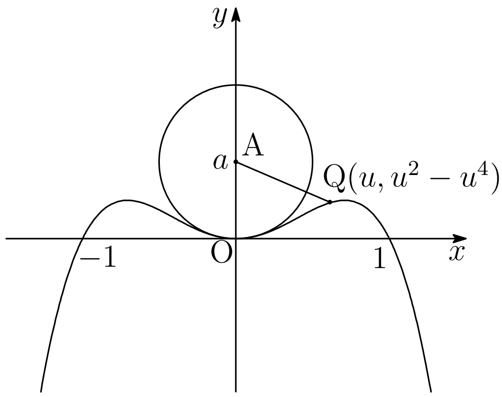


(2) 2 点 A$(0,\ a)$，Q$(u,\ u^2-u^4)$ について $(a>0)$

$$\mathrm{AQ}^2 = u^2 + (u^2-u^4-a)^2$$

であるから，$t=u^2$，$g(t)=\mathrm{AQ}^2$ とおくと

$$g(t) = t + (t-t^2-a)^2 \quad (t \geqq 0)$$



$g(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 + 2(t-t^2-a)(1-2t) \\ &= 4t^3 - 6t^2 + (4a+2)t + 1 - 2a \end{aligned}$$

条件を満たすとき，$g(t)$ は $t=0$ で最小でなければならないから，$t \to +0$ において $g'(t) \geqq 0$ であることが必要である．

$$1-2a \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leqq \frac{1}{2}$$

このとき $\quad \begin{aligned} g(t) &= t + (t-t^2)^2 - 2a(t-t^2) + a^2 \\ &= (1-2a)t + 2at^2 + (t-t^2)^2 + a^2 \geqq a^2 = g(0) \end{aligned}$

上式において，等号が成立するのは，$t=0$ のときに限る．

よって，求める条件は $\quad \boldsymbol{0 < a \leqq \frac{1}{2}}$

補足 $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C は曲線 $y=x^2$ および $y=x^2-x^4$ の原点における接触円 (曲率円) である[2]．これらの曲線は，$x=0$ において，$y,\ y',\ y''$ がそれぞれ等しく，原点における接触円が一致する．

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (p.10 を参照)

(3) $y=x^2-x^4$ より　$y'=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$

$y=x^2-x^4$ は y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ における増減表は

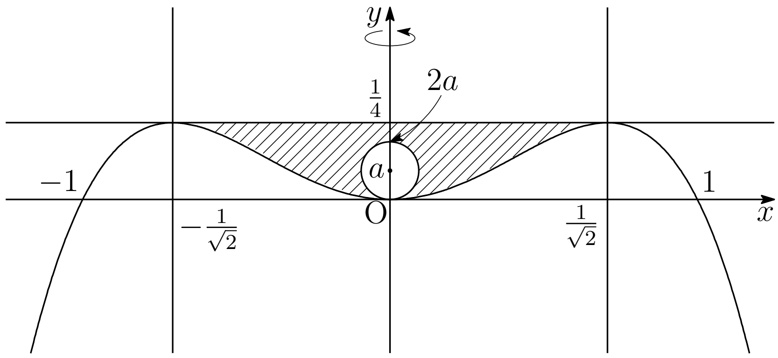
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	0	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

求める回転体の体積を V，$y=x^2-x^4$ と $y=\dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dy = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2y'\,dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(2x-4x^3)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

(i) $0<a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

$$V = V_1 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{24} - \frac{4}{3}\pi a^3$$



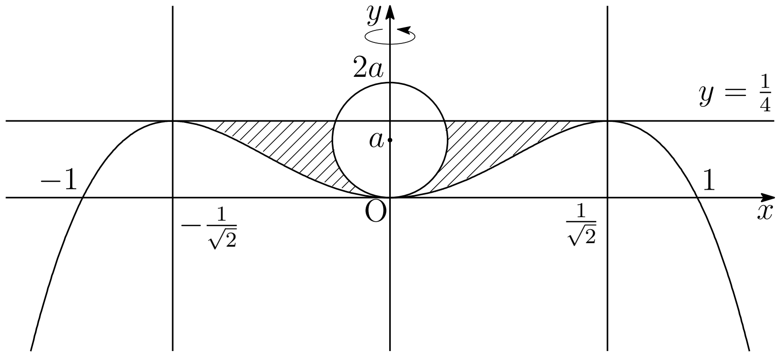
(ii) $\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$x^2 + (y-a)^2 \leqq a^2$，$y \leqq \dfrac{1}{4}$ を満たす領域を y 軸の周り回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dy = \pi \int_0^{\frac{1}{4}} (2ay - y^2)\,dy \\ &= \pi \Big[\ ay^2 - \frac{1}{3}y^3\ \Big]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\pi}{16}a - \frac{\pi}{192} \end{aligned}$$

したがって

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{24} - \left(\frac{\pi}{16}a - \frac{\pi}{192}\right) = \frac{3}{64}\pi - \frac{\pi}{16}a$$



よって $\quad \boldsymbol{V = \begin{cases} \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{4}{3}\pi a^3 & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{8}\right) \\ \dfrac{3}{64}\pi - \dfrac{\pi}{16}a & \left(\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}}$