令和２年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　令和２年２月 25 日

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2) k 個の連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k に対して，

$$|{x_j}^2 - x_j - 23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，$\cdots$，x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1 + 1,\ x_2 + 2,\ \cdots,\ x + k - 1$$

となる列のことである．

$\boxed{2}$ 複素数平面上の異なる 3 点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) △ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4 + \mathrm{BP}^4 + \mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 4),\ \mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$$

をとる．さらに $0 < a < 3$，$0 < b < 3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える．

(1) 点 P，Q，R を通る平面を H とする．平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ．

(2) 点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $m,\ n$ $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r$ $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのとき極限値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2-x-23$ とおくと，法 3 について

$$(*) \quad |f(x)| \equiv 2 \pmod 3$$

を満たす正の整数 x を求めればよい．

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & f(x) \equiv 0, \quad -f(x) \equiv 0 & \pmod 3 \end{array}$$

$f(x)=(x+4)(x-5)-3=(x+5)(x-6)+7$ より

$$\begin{array}{lll} 1 \leqq x \leqq 5 \text{ のとき} & f(x)<0 \text{ より} & |f(x)|=-f(x) \\ 6 \leqq x \text{ のとき} & f(x)>0 \text{ より} & |f(x)|=f(x) \end{array}$$

$(*)$ を満たす正の整数は，$1 \leqq x \leqq 5$ で

$$x \equiv 0 \quad \text{または} \quad x \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=1,\ 3,\ 4}$$

(2) (1) で示した

$$x \equiv 2 \text{ のとき} \quad |f(x)| \equiv 0 \pmod 3$$

により，$x \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$|f(x)|$ は 3 で割り切れる．

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	**23**	21	**17**	**11**	**3**	**7**	**19**	33

$$x \geqq 6 \text{ のとき} \quad |f(x)|=f(x) \geqq f(6)=7$$

$x \equiv 2 \pmod 3$，$x \geqq 8$ のとき，$|f(x)|$ は 3 を因数にもつ合成数である．
このとき，連続して素数が現れる正の整数は高々2 個である．
よって，上の表から，k の最大値は **5**

連続する正の整数は **3，4，5，6，7**

補足 正の整数 x を順次代入することで，結果 $(k=5)$ が予測できる．$x \geqq 8$ において，k が 5 より小さいことを示してもよい．例えば，法 7 について

$$\begin{array}{ll} f(8) \equiv f(1)=-23 \equiv 5, & f(9) \equiv f(2)=-21 \equiv 0, \\ f(10) \equiv f(3)=-17 \equiv 4, & f(11) \equiv f(4)=-11 \equiv 3, \\ f(12) \equiv f(5)=-3 \equiv 4, & f(13) \equiv f(6)=7 \equiv 0, \\ f(14) \equiv f(0)=-23 \equiv 5 & \end{array}$$

このように，7 で割り切れる数が間に現れ，$k<5$ であることが分かる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形となるとき

$$w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=w \quad \text{または} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{w}$$

$w+\overline{w}=1$，$w\overline{w}=|w|^2=1$ より，w，$\overline{w}$ を解とする 2 次方程式は

$$z^2-(w+\overline{w})z+w\overline{w}=0 \quad \text{すなわち} \quad z^2-z+1=0$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は，この 2 次方程式の解であるから

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0 \quad \cdots ①$$

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

整理すると　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \quad \cdots(*)$

また，$(*) \Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=w,\ \overline{w} \Longrightarrow$ △ABC は正三角形

よって，△ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

(2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする正三角形 ABC の外心を原点 O とすると ($|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=R$)，△ABC の外心と重心は一致するから

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha+\beta+\gamma=0 \quad \cdots ②$$

△ABC の外接円の点 P(z) について ($|z|=R$)

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=|z-\alpha|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|z|^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+|\alpha|^2\\&=2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\end{aligned}$$

同様に　$\mathrm{BP}^2=2R^2-(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2=2R^2-(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})$

上の 3 式および ② から

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=6R^2-(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z+(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&=\boldsymbol{6R^2}\end{aligned}$$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=0$ より　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

これと (1) の結果から

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \quad \cdots(**)$$

$\mathrm{AP}^2=2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4&=(\mathrm{AP}^2)^2=\{2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\}^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+2R^4+\alpha^2\overline{z}^2\\&=6R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\overline{\alpha}^2z^2+\alpha^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

同様に，$\mathrm{BP}^2=2R^2-(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})$，$\mathrm{CP}^2=2R^2-(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\beta}z+\beta\overline{z})+\overline{\beta}^2z^2+\beta^2\overline{z}^2,\\\mathrm{CP}^4&=6R^4-4R^2(\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z})+\overline{\gamma}^2z^2+\gamma^2\overline{z}^2\end{aligned}$$

これらの 3 式と $(**)$ により

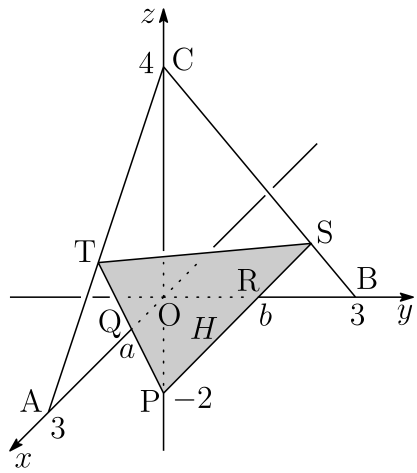
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=18R^4-4R^2(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&\quad+(\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overline{z}^2=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

別解　$w=\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とおくと　$1+w+\overline{w}=0$，$1+w^2+\overline{w}^2=0$

$\mathrm{A}(R)$，$\mathrm{B}(Rw)$，$\mathrm{C}(R\overline{w})$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと $(|z|=R)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|z-R|^2+|z-Rw|^2+|z-R\overline{w}|^2\\&=(z-R)(\overline{z}-R)+(z-Rw)(\overline{z}-R\overline{w})\\&\qquad+(z-R\overline{w})(\overline{z}-Rw)\\&=2R^2-R(z+\overline{z})+2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\\&\qquad+2R^2-R(wz+\overline{wz})\\&=6R^2-R(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})=\boldsymbol{6R^2},\\\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=(|z-R|^2)^2+(|z-Rw|^2)^2+(|z-R\overline{w}|^2)^2\\&=\{2R^2-R(z+\overline{z})\}^2+\{2R^2-R(\overline{w}z+w\overline{z})\}^2\\&\qquad\{2R^2-R(wz+\overline{wz})\}^2\\&=4R^4-4R^3(z+\overline{z})+R^2(z^2+\overline{z}^2+2R^2)\\&\qquad+4R^4-4R^3(\overline{w}z+w\overline{z})+R^2(\overline{w}^2z^2+w^2\overline{z}^2+2R^2)\\&\qquad+4R^4-4R^3(wz+\overline{wz})+R^2(w^2z^2+\overline{w}^2\overline{z}^2+2R^2)\\&=18R^4-4R^3(1+w+\overline{w})(z+\overline{z})+R^2(1+w^2+\overline{w}^2)(z^2+\overline{z}^2)\\&=\boldsymbol{18R^4}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) Tは2点$\mathrm{P}(0,\ 0, -2)$，$\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$を通る直線上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \\ \overrightarrow{\mathrm{OT}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= (at,\ 0,\ 2t-2) \\ &= \frac{at}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \end{aligned}$$

Tは線分AC上の点であるから $\quad \dfrac{at}{3} + \dfrac{t-1}{2} = 1$

ゆえに $\quad t = \dfrac{9}{2a+3} \qquad$ よって $\quad \mathbf{T}\left(\dfrac{\mathbf{9a}}{\mathbf{2a+3}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{4(3-a)}}{\mathbf{2a+3}}\right)$

Sは2点$\mathrm{P}(0,\ 0, -2)$，$\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$を通る直線上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = s\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

とおくと (s は実数)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s(\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \\ \overrightarrow{\mathrm{OS}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OR}} \\ &= (0,\ bs,\ 2s-2) = \frac{bs}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{s-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \end{aligned}$$

Sは線分BC上の点であるから $\quad \dfrac{bs}{3} + \dfrac{s-1}{2} = 1$

ゆえに $\quad s = \dfrac{9}{2b+3} \qquad$ よって $\quad \mathbf{S}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{9b}}{\mathbf{2b+3}},\ \dfrac{\mathbf{4(3-b)}}{\mathbf{2b+3}}\right)$

別解 Tはzx平面上の2直線AC，PQの交点であるから

$$\mathrm{AC}: \frac{x}{3} + \frac{z}{4} = 1, \quad \mathrm{PQ}: \frac{x}{a} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに $\quad x = \dfrac{9a}{2a+3},\quad z = \dfrac{4(3-a)}{2a+3} \qquad$ よって $\quad \mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{4(3-a)}{2a+3}\right)$

Sはyz平面上の2直線BC，PRの交点であるから

$$\mathrm{BC}: \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, \quad \mathrm{PQ}: \frac{y}{b} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに $\quad y = \dfrac{9b}{2b+3},\quad z = \dfrac{4(3-b)}{2b+3} \qquad$ よって $\quad \mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{4(3-b)}{2b+3}\right)$

(2) 方べきの定理とその逆により，点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT} = \mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS} \quad \text{ゆえに} \quad t\mathrm{PQ}^2 = s\mathrm{PR}^2$$

が成立することである．$\mathrm{PQ}^2 = a^2+4$，$\mathrm{PR}^2 = b^2+4$ および (1) で求めた s，t を上の第 2 式に代入すると

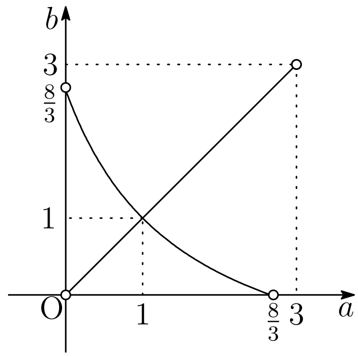
$$\frac{9}{2a+3}\cdot(a^2+4) = \frac{9}{2b+3}\cdot(b^2+4)$$

ゆえに $(a^2+4)(2b+3) = (b^2+4)(2a+3)$

$$(a-b)(2ab+3a+3b-8) = 0$$

よって **$b = a$ または $b = \dfrac{-3a+8}{2a+3}$**

$(0 < a < 3,\ 0 < b < 3)$



4 (1) O を原点とする xy 系から，O を原点とし X 軸，Y 軸をそれぞれ ℓ に平行および垂直な XY 系への直交変換を行う．xy 系の正規直交基底

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，XY 系の正規直交基底を

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2$ より

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X+Y \\ -X+Y \end{pmatrix}$$

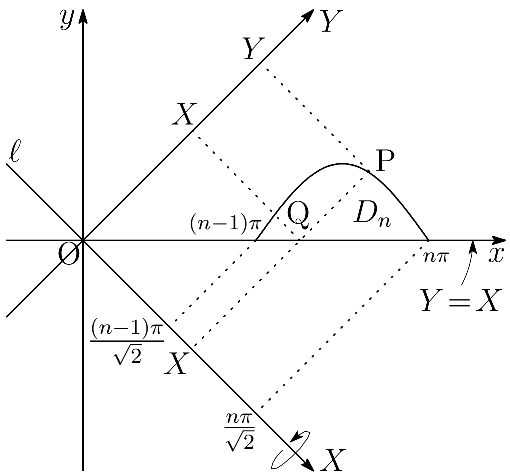
したがって $\begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 逆に $(*)\begin{cases} X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

XY 系において点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と点 Q の X 座標は等しく，Q は直線 $Y=X$ 上の点であるから

$$\mathrm{Q}(X,\ X)$$

線分 PQ を ℓ (X 軸) の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$\pi(Y^2-X^2)=\pi\left\{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=2\pi xy=\boldsymbol{2\pi x\sin x}$$



(2) $(*)$ より　$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}$$

ゆえに

x	$(n-1)\pi\ \longrightarrow\ n\pi$
X	$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}\ \longrightarrow\ \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$

(1) の結果から，回転体の体積 V_n は，n が奇数であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi}&=\int_{\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}}(Y^2-X^2)\,dX\\&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(2x\sin x-x\sin 2x)\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-2x\cos x+2\sin x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(4n-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)}$

発展 D_n の面積を S_n とし，x 軸の周りに D_n を1回転させてできる回転体の体積を W_n とすると

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = 2,$$

$$\begin{aligned} W_n &= \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

D_n の対称性により D_n の重心を $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}, h_n\right)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理[1] により

$$W_n = 2\pi h_n S_n \quad \text{ゆえに} \quad h_n = \frac{W_n}{2\pi S_n} = \frac{\pi}{8}$$

重心 $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{8}\right)$ から直線 $\ell : x+y=0$ までの距離を d_n とすると

$$d_n = \frac{\left|\dfrac{(2n-1)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n - \frac{3}{4}\right)$$

よって　$V_n = 2\pi d_n S_n = 2\pi \cdot \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n - \dfrac{3}{4}\right)\cdot 2 = \sqrt{2}\pi^2\left(2n - \dfrac{3}{4}\right)$

注意 パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外であるから，検算としての利用に留めなければならない．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2} dx$ より (k は正の整数)

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1} \sin \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 x^{k+1} \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right)' dx \\ &= \left[\ x^{k+1} \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right) \ \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (k+1)x^k \left(\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right)' dx \\ &= \left[\ (k+1)x^k \left(\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right) \ \right]_0^1 - \int_0^1 k(k+1)x^{k-1} \left(\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right) dx \\ &= \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2} \int_0^1 x^{k-1} \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) dx \end{aligned}$$

よって　$a_{k+2} = \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2} a_k = \boldsymbol{\frac{4(k+1)}{\pi^2}(1 - k a_k)}$

(2) (1) の結果から　$1 - k a_k = \frac{\pi^2}{4(k+1)} a_{k+2}$

$a_{k+2} = \int_0^1 x^{k+1} \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) dx$ より

$$0 < a_{k+2} < \int_0^1 x^{k+1} \, dx = \left[\ \frac{x^{k+2}}{k+2} \ \right]_0^1 = \frac{1}{k+2}$$

したがって　$0 < 1 - k a_k < \frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}$

$\lim_{k \to \infty} \frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k \to \infty} (1 - k a_k) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{k \to \infty} k a_k = 1}$$

別解 $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2}\, dx$ より (k は正の整数)

$$a_k < \int_0^1 x^{k-1}\, dx = \frac{1}{k},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \left[\ \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(-\frac{\pi^2}{4}\right) \cos \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} \cos \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} dx = \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < a_k < \frac{1}{k}$

$$-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} < ka_k - 1 < 0$$

$\displaystyle \lim_{k\to\infty} \left\{-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}\right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty} (ka_k - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad A = \lim_{k\to\infty} ka_k = 1$$

(3) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2}\, dx$ より (k は正の整数) [別解を参照]

$$a_k > \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2}\, dx \\
&= \left[\ \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right)\right. \\
&\qquad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}\right) \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{\pi^4}{16} \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx \\
&< \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{\pi^4}{16}\, dx \\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

したがって

$$(*) \quad 0 < a_k - \frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$A = 1$ および $(*)$ から，$\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束することに注意して，辺々に $k^3 > 0$ を掛けると

$$0 < k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $\dfrac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}$ を加えると

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4} \\
&< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^3a_k-k^2A+\frac{\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{B=\lim_{k\to\infty}(k^3a_k-k^2A)=-\frac{\pi^2}{4},\ m=3,\ n=2}$

(4) (3) の結果から

$$\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}<k^3a_k-k^2A-B$$
$$<\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

辺々に $k>0$ を掛けると

$$\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}<k^4a_k-k^3A-kB$$
$$<\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $-\dfrac{3\pi^2}{4}$ を加えると

$$-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}<k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}$$
$$<-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}\right\}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\right)=0$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}(k^4a_k-k^3A-kB)=\frac{3\pi^2}{4},\ p=4,\ q=3,\ r=1}$

解説 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\qquad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x)\\ &\qquad \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例えば，$\displaystyle\int x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ について，$f(x) = \dfrac{x^k}{k}$，$g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^k}{k}\right)'\sin\frac{\pi x}{2}\,dx &= \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\ &\quad + \int \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

本題 (3) はこれを利用して，定積分を行っている．

発展 前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1,0,1,\ldots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．

よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$