

令和2年度 東京工業大学 2次試験前期日程 (数学問題)180分  
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B 令和2年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

- (1)  $|x^2 - x - 23|$  の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数  $x$  をすべて求めよ.
- (2)  $k$  個の連続した正の整数  $x_1, \dots, x_k$  に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| \quad (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる  $k$  の最大値と, その  $k$  に対する連続した正の整数  $x_1, \dots, x_k$  をすべて求めよ. ここで  $k$  個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x + k - 1$$

となる列のことである.

2 複素数平面上の異なる3点 A, B, C を複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  で表す. ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する.

- (1)  $\triangle ABC$  が正三角形となる必要十分条件は,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ.

- (2)  $\triangle ABC$  が正三角形のとき,  $\triangle ABC$  の外接円上の点 P を任意にとる. このとき,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

および

$$AP^4 + BP^4 + CP^4$$

を外接円の半径  $R$  を用いて表せ. ただし2点 X, Y に対し, XY とは線分 XY の長さを表す.

**3** 座標空間に 5 点

$$O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), P(0, 0, -2)$$

をとる. さらに  $0 < a < 3$ ,  $0 < b < 3$  に対して 2 点  $Q(a, 0, 0)$  と  $R(0, b, 0)$  を考える.

- (1) 点  $P, Q, R$  を通る平面を  $H$  とする. 平面  $H$  と線分  $AC$  の交点  $T$  の座標, および平面  $H$  と線分  $BC$  の交点  $S$  の座標を求めよ.
- (2) 点  $Q, R, S, T$  が同一円周上にあるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表し, それを満たす点  $(a, b)$  の範囲を座標平面上に図示せよ.

**4**  $n$  を正の奇数とする. 曲線  $y = \sin x$  ( $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ ) と  $x$  軸で囲まれた部分を  $D_n$  とする. 直線  $x + y = 0$  を  $\ell$  とおき,  $\ell$  の周りに  $D_n$  を 1 回転させてできる回転体を  $V_n$  とする.

- (1)  $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$  に対して, 点  $(x, \sin x)$  を  $P$  とおく. また  $P$  から  $\ell$  に下ろした垂線と  $x$  軸の交点を  $Q$  とする. 線分  $PQ$  を  $\ell$  の周りに 1 回転させてできる図形の面積を  $x$  の式で表せ.
- (2) (1) の結果を用いて, 回転体  $V_n$  の体積を  $n$  の式で表せ.

**5**  $k$  を正の整数とし,  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$  とおく.

- (1)  $a_{k+2}$  を  $a_k$  と  $k$  を用いて表せ.
- (2)  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列  $\{ka_k\}$  の極限值  $A$  を求めよ.
- (3) (2) の極限值  $A$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数  $m, n$  ( $m > n \geq 1$ ) を求めよ. またそのときの極限值  $B$  を求めよ.

- (4) (2) と (3) の極限值  $A, B$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数  $p, q, r$  ( $p > q > r \geq 1$ ) を求めよ. またそのとき極限值を求めよ.

## 解答例

**1** (1)  $f(x) = x^2 - x - 23$  とおくと、法 3 について

$$(*) \quad |f(x)| \equiv 2 \pmod{3}$$

を満たす正の整数  $x$  を求めればよい.

$$x \equiv 0 \text{ のとき} \quad f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \text{ のとき} \quad f(x) \equiv 1, \quad -f(x) \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \text{ のとき} \quad f(x) \equiv 0, \quad -f(x) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(x) = (x+4)(x-5) - 3 = (x+5)(x-6) + 7 \text{ より}$$

$$1 \leq x \leq 5 \text{ のとき} \quad f(x) < 0 \text{ より} \quad |f(x)| = -f(x)$$

$$6 \leq x \text{ のとき} \quad f(x) > 0 \text{ より} \quad |f(x)| = f(x)$$

(\*) を満たす正の整数は、 $1 \leq x \leq 5$  で

$$x \equiv 0 \text{ または } x \equiv 1 \pmod{3} \text{ すなわち } x = 1, 3, 4$$

(2) (1) で示した

$$x \equiv 2 \text{ のとき} \quad |f(x)| \equiv 0 \pmod{3}$$

により、 $x \equiv 2 \pmod{3}$  のとき、 $|f(x)|$  は 3 で割り切れる.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	<b>23</b>	21	<b>17</b>	<b>11</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>19</b>	33

$$x \geq 6 \text{ のとき} \quad |f(x)| = f(x) \geq f(6) = 7$$

$x \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $x \geq 8$  のとき、 $|f(x)|$  は 3 を因数にもつ合成数である.

このとき、連続して素数が現れる正の整数は高々 2 個である.

よって、上の表から、 $k$  の最大値は 5

連続する正の整数は **3, 4, 5, 6, 7**

**補足** 正の整数  $x$  を順次代入することで、結果 ( $k = 5$ ) が予測できる.  $x \geq 8$  において、 $k$  が 5 より小さいことを示してもよい. 例えば、法 7 について

$$f(8) \equiv f(1) = -23 \equiv 5, \quad f(9) \equiv f(2) = -21 \equiv 0,$$

$$f(10) \equiv f(3) = -17 \equiv 4, \quad f(11) \equiv f(4) = -11 \equiv 3,$$

$$f(12) \equiv f(5) = -3 \equiv 4, \quad f(13) \equiv f(6) = 7 \equiv 0,$$

$$f(14) \equiv f(0) = -23 \equiv 5$$

このように、7 で割り切れる数が間に現れ、 $k < 5$  であることが分かる. ■

- 2 (1) 複素数平面上的異なる3点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  が正三角形となるとき

$$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とすると

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = w \quad \text{または} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \bar{w}$$

$w + \bar{w} = 1$ ,  $w\bar{w} = |w|^2 = 1$  より,  $w$ ,  $\bar{w}$  を解とする2次方程式は

$$z^2 - (w + \bar{w})z + w\bar{w} = 0 \quad \text{すなわち} \quad z^2 - z + 1 = 0$$

$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  は, この2次方程式の解であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0$$

整理すると  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \dots (*)$

また,  $(*) \implies \textcircled{1} \implies \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = w, \bar{w} \implies \triangle ABC$  は正三角形

よって,  $\triangle ABC$  が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

- (2) 3点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  を頂点とする正三角形  $ABC$  の外心を原点  $O$  とすると ( $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$ ),  $\triangle ABC$  の外心と重心は一致するから

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\triangle ABC$  の外接円の点  $P(z)$  について ( $|z| = R$ )

$$\begin{aligned} AP^2 &= |z - \alpha|^2 = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = |z|^2 - (\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}) + |\alpha|^2 \\ &= 2R^2 - (\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}) \end{aligned}$$

同様に  $BP^2 = 2R^2 - (\bar{\beta}z + \beta\bar{z})$ ,  $CP^2 = 2R^2 - (\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z})$

上の3式および  $\textcircled{2}$  から

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= 6R^2 - (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma})z + (\alpha + \beta + \gamma)\bar{z} \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0 \text{ より } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

これと (1) の結果から

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \quad \dots (**)$$

$$AP^2 = 2R^2 - (\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} AP^4 &= (AP^2)^2 = \{2R^2 - (\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z})\}^2 \\ &= 4R^4 - 4R^2(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}) + \bar{\alpha}^2 z^2 + 2R^4 + \alpha^2 \bar{z}^2 \\ &= 6R^4 - 4R^2(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}) + \bar{\alpha}^2 z^2 + \alpha^2 \bar{z}^2 \end{aligned}$$

$$\text{同様に, } BP^2 = 2R^2 - (\bar{\beta}z + \beta\bar{z}), \quad CP^2 = 2R^2 - (\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} BP^4 &= 6R^4 - 4R^2(\bar{\beta}z + \beta\bar{z}) + \bar{\beta}^2 z^2 + \beta^2 \bar{z}^2, \\ CP^4 &= 6R^4 - 4R^2(\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z}) + \bar{\gamma}^2 z^2 + \gamma^2 \bar{z}^2 \end{aligned}$$

これらの3式と (\*\*) により

$$\begin{aligned} AP^4 + BP^4 + CP^4 &= 18R^4 - 4R^2(\overline{\alpha + \beta + \gamma})z - 4R^2(\alpha + \beta + \gamma)\bar{z} \\ &\quad + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)z^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\bar{z}^2 = \mathbf{18R^4} \end{aligned}$$

別解  $w = \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$  とおくと  $1 + w + \bar{w} = 0, \quad 1 + w^2 + \bar{w}^2 = 0$

$$A(R), B(Rw), C(R\bar{w}), P(z) \text{ とおくと } (|z| = R)$$

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= |z - R|^2 + |z - Rw|^2 + |z - R\bar{w}|^2 \\ &= (z - R)(\bar{z} - R) + (z - Rw)(\bar{z} - R\bar{w}) \\ &\quad + (z - R\bar{w})(\bar{z} - R w) \\ &= 2R^2 - R(z + \bar{z}) + 2R^2 - R(\bar{w}z + w\bar{z}) \\ &\quad + 2R^2 - R(wz + \bar{w}\bar{z}) \\ &= 6R^2 - R(1 + w + \bar{w})(z + \bar{z}) = \mathbf{6R^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AP^4 + BP^4 + CP^4 &= (|z - R|^2)^2 + (|z - Rw|^2)^2 + (|z - R\bar{w}|^2)^2 \\ &= \{2R^2 - R(z + \bar{z})\}^2 + \{2R^2 - R(\bar{w}z + w\bar{z})\}^2 \\ &\quad + \{2R^2 - R(wz + \bar{w}\bar{z})\}^2 \\ &= 4R^4 - 4R^3(z + \bar{z}) + R^2(z^2 + \bar{z}^2 + 2R^2) \\ &\quad + 4R^4 - 4R^3(\bar{w}z + w\bar{z}) + R^2(\bar{w}^2 z^2 + w^2 \bar{z}^2 + 2R^2) \\ &\quad + 4R^4 - 4R^3(wz + \bar{w}\bar{z}) + R^2(w^2 z^2 + \bar{w}^2 \bar{z}^2 + 2R^2) \\ &= 18R^4 - 4R^3(1 + w + \bar{w})(z + \bar{z}) + R^2(1 + w^2 + \bar{w}^2)(z^2 + \bar{z}^2) \\ &= \mathbf{18R^4} \end{aligned}$$

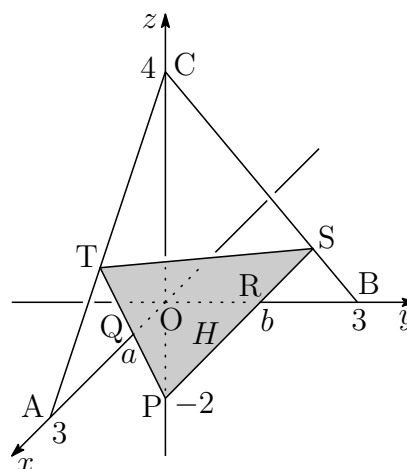


- 3** (1) T は 2 点  $P(0, 0, -2)$ ,  $Q(a, 0, 0)$  を通る直線上の点であるから

$$\vec{PT} = t\vec{PQ}$$

とおくと ( $t$  は実数)

$$\begin{aligned}\vec{OT} - \vec{OP} &= t(\vec{OQ} - \vec{OP}) \\ \vec{OT} &= (1-t)\vec{OP} + t\vec{OQ} \\ &= (at, 0, 2t-2) \\ &= \frac{at}{3}\vec{OA} + \frac{t-1}{2}\vec{OC}\end{aligned}$$



T は線分 AC 上の点であるから  $\frac{at}{3} + \frac{t-1}{2} = 1$

ゆえに  $t = \frac{9}{2a+3}$  よって  $T\left(\frac{9a}{2a+3}, 0, \frac{4(3-a)}{2a+3}\right)$

S は 2 点  $P(0, 0, -2)$ ,  $R(0, b, 0)$  を通る直線上の点であるから

$$\vec{PS} = s\vec{PR}$$

とおくと ( $s$  は実数)  $\vec{OS} - \vec{OP} = s(\vec{OR} - \vec{OP})$

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= (1-s)\vec{OP} + s\vec{OR} \\ &= (0, bs, 2s-2) = \frac{bs}{3}\vec{OB} + \frac{s-1}{2}\vec{OC}\end{aligned}$$

S は線分 BC 上の点であるから  $\frac{bs}{3} + \frac{s-1}{2} = 1$

ゆえに  $s = \frac{9}{2b+3}$  よって  $S\left(0, \frac{9b}{2b+3}, \frac{4(3-b)}{2b+3}\right)$

別解 T は  $zx$  平面上の 2 直線 AC, PQ の交点であるから

$$AC: \frac{x}{3} + \frac{z}{4} = 1, \quad PQ: \frac{x}{a} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに  $x = \frac{9a}{2a+3}$ ,  $z = \frac{4(3-a)}{2a+3}$  よって  $T\left(\frac{9a}{2a+3}, 0, \frac{4(3-a)}{2a+3}\right)$

S は  $yz$  平面上の 2 直線 BC, PR の交点であるから

$$BC: \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, \quad PR: \frac{y}{b} + \frac{z}{-2} = 1$$

ゆえに  $y = \frac{9b}{2b+3}$ ,  $z = \frac{4(3-b)}{2b+3}$  よって  $S\left(0, \frac{9b}{2b+3}, \frac{4(3-b)}{2b+3}\right)$

- (2) 方べきの定理とその逆により, 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は

$$PQ \cdot PT = PR \cdot PS \quad \text{ゆえに} \quad tPQ^2 = sPR^2$$

が成立することである.  $PQ^2 = a^2 + 4$ ,  $PR^2 = b^2 + 4$  および (1) で求めた  $s, t$  を上の第 2 式に代入すると

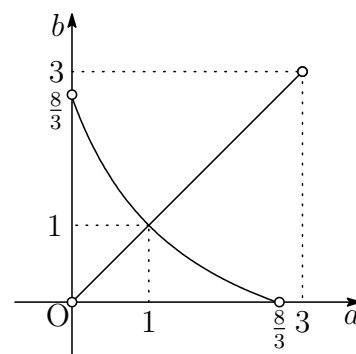
$$\frac{9}{2a+3} \cdot (a^2 + 4) = \frac{9}{2b+3} \cdot (b^2 + 4)$$

$$\text{ゆえに} \quad (a^2 + 4)(2b + 3) = (b^2 + 4)(2a + 3)$$

$$(a - b)(2ab + 3a + 3b - 8) = 0$$

$$\text{よって} \quad b = a \quad \text{または} \quad b = \frac{-3a + 8}{2a + 3}$$

$$(0 < a < 3, 0 < b < 3)$$



- 4** (1) O を原点とする  $xy$  系から, O を原点とし  $X$  軸,  $Y$  軸をそれぞれ  $l$  に平行および垂直な  $XY$  系への直交変換を行う.  $xy$  系の正規直交基底

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し,  $XY$  系の正規直交基底を

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると,  $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2$  より

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{X}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X + Y \\ -X + Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

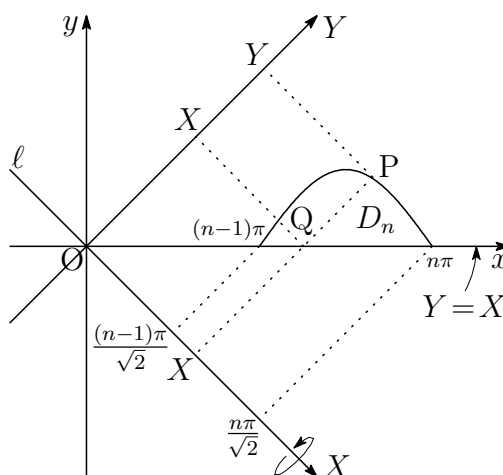
$$\text{したがって} \quad \begin{cases} x = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-X + Y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{逆に} \quad (*) \quad \begin{cases} X = \frac{x - y}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$XY$ 系において点  $P(X, Y)$  と点  $Q$  の  $X$  座標は等しく,  $Q$  は直線  $Y = X$  上の点であるから

$$Q(X, X)$$

線分  $PQ$  を  $\ell$  ( $X$  軸) の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$\pi(Y^2 - X^2) = \pi \left\{ \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left( \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} = 2\pi xy = 2\pi x \sin x$$



$$(2) (*) \text{ より } X = \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1 - \cos x}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに}$$

$x$	$(n-1)\pi \rightarrow n\pi$
$X$	$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$

(1) の結果から, 回転体の体積  $V_n$  は,  $n$  が奇数であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\pi} &= \int_{\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} (Y^2 - X^2) dX \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} 2x \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\sqrt{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (2x \sin x - x \sin 2x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -2x \cos x + 2 \sin x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left( 4n - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって } V_n = \sqrt{2}\pi^2 \left( 2n - \frac{3}{4} \right)$$

発展  $D_n$  の面積を  $S_n$  とし,  $x$  軸の周りに  $D_n$  を 1 回転させてできる回転体の体積を  $W_n$  とすると

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = 2,$$

$$W_n = \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$D_n$  の対称性により  $D_n$  の重心を  $G_n \left( \frac{(2n-1)\pi}{2}, h_n \right)$  とすると, パップス・ギュルダンの定理<sup>1</sup> により

$$W_n = 2\pi h_n S_n \quad \text{ゆえに} \quad h_n = \frac{W_n}{2\pi S_n} = \frac{\pi}{8}$$

重心  $G_n \left( \frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{\pi}{8} \right)$  から直線  $\ell: x+y=0$  までの距離を  $d_n$  とすると

$$d_n = \frac{\left| \frac{(2n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left( 2n - \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{よって} \quad V_n = 2\pi d_n S_n = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left( 2n - \frac{3}{4} \right) \cdot 2 = \sqrt{2}\pi^2 \left( 2n - \frac{3}{4} \right)$$

別解  $y = \sin x$  の微小区間  $[t, t + \Delta t]$  の面積  $\Delta S$  とその重心  $G$  は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad G \left( t, \frac{1}{2} \sin t \right)$$

$G$  と直線  $x+y=0$  の距離  $d$  は  $d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( t + \frac{1}{2} \sin t \right)$

$$V_n = 2\pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( t + \frac{1}{2} \sin t \right) \sin t \, dt$$

$$= \sqrt{2}\pi \left[ -t \cos t + \sin t + \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \sqrt{2}\pi^2 \left( 2n - \frac{3}{4} \right)$$

注意 パップス・ギュルダンの定理は, 高校数学の範囲外であるから, 検算としての利用に留めなければならない。 ■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf) (p.6 を参照)

**5** (1)  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2} dx$  より ( $k$  は正の整数)

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1} \sin \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 x^{k+1} \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right)' dx \\
 &= \left[ x^{k+1} \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 (k+1)x^k \left( \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right)' dx \\
 &= \left[ (k+1)x^k \left( \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 k(k+1)x^{k-1} \left( \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2} \int_0^1 x^{k-1} \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a_{k+2} = \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2} a_k = \frac{4(k+1)}{\pi^2} (1 - ka_k)$$

(2) (1) の結果から  $1 - ka_k = \frac{\pi^2}{4(k+1)} a_{k+2}$

$$a_{k+2} = \int_0^1 x^{k+1} \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) dx \text{ より}$$

$$0 < a_{k+2} < \int_0^1 x^{k+1} dx = \left[ \frac{x^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 = \frac{1}{k+2}$$

$$\text{したがって } 0 < 1 - ka_k < \frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} = 0$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - ka_k) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} ka_k = 1$$

別解  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2} dx$  より ( $k$  は正の整数)

$$\begin{aligned}
 a_k &< \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k}, \\
 a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2} dx \\
 &= \left[ \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(-\frac{\pi^2}{4}\right) \cos \frac{\pi x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} \cos \frac{\pi x}{2} dx \\
 &> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)} \int_0^1 x^{k+1} dx = \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}
 \end{aligned}$$

したがって  $\frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < a_k < \frac{1}{k}$

$$-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} < ka_k - 1 < 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)} \right\} = 0$  であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (ka_k - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad A = \lim_{k \rightarrow \infty} ka_k = 1$$

(3)  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2} dx$  より ( $k$  は正の整数) [別解を参照]

$$\begin{aligned}
 a_k &> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}, \\
 a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2} dx \\
 &= \left[ \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{\pi^4}{16} \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx \\
 &< \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{\pi^4}{16} dx \\
 &= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
 \end{aligned}$$

したがって

$$(*) \quad 0 < a_k - \frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$A = 1$  および (\*) から,  $\{k^m a_k - k^n A\}$  が 0 ではない値に収束することに注意して, 辺々に  $k^3 > 0$  を掛けると

$$0 < k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに, 辺々に  $\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}$  を加えると

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4} \\
 &< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^4 k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = 0$$

であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4} \right) = 0$$

$$\text{よって } B = \lim_{k \rightarrow \infty} (k^3 a_k - k^2 A) = -\frac{\pi^2}{4}, \quad m = 3, \quad n = 2$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A - B \\ &< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \end{aligned}$$

辺々に  $k > 0$  を掛けると

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^4 a_k - k^3 A - kB \\ &< \frac{\pi^2 k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \end{aligned}$$

さらに、辺々に  $-\frac{3\pi^2}{4}$  を加えると

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)} &< k^4 a_k - k^3 A - kB - \frac{3\pi^2}{4} \\ &< -\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)} \right\} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^4 k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = 0$$

であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( k^4 a_k - k^3 A - kB - \frac{3\pi^2}{4} \right) = 0$$

$$\text{よって } \lim_{k \rightarrow \infty} (k^4 a_k - k^3 A - kB) = \frac{3\pi^2}{4}, \quad p = 4, \quad q = 3, \quad r = 1$$

解説 本来, 部分積分法

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

は漸化式である.  $f(x)$  の第  $n$  次導関数を  $f^{(n)}(x)$  と表すように ( $n$  は自然数), ここで,  $n$  を 0 さらに負の整数まで拡張することにする. 実際にはこのような定義はないが,  $f^{(-n)}(x)$  を  $f(x)$  の第  $n$  次原始関数と定義する. 上の積分について, 部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) dx \end{aligned}$$

が成立する. 同様に, 次式も成立する.

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x) dx \end{aligned}$$

例えば,  $\int x^{k-1} \sin \frac{\pi x}{2} dx$  について,  $f(x) = \frac{x^k}{k}$ ,  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  とすると

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin \frac{\pi x}{2} dx &= \frac{x^k}{k} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(-\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + \int \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{\pi^4}{16} \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

本題 (3) はこれを利用して, 定積分を行っている.

発展 前ページで示した結果から、定積分についても同様に、次式が成立する.

$$\int_x^a f(t)g'(t) dt = \left[ f(t)g(t) \right]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t) \right]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t) dt$$

$g^{(-k)}(t) = \frac{1}{k!}(t-x)^k$  とおくと ( $k = -1, 0, 1, \dots$ ),  $g(t) = 1$ ,  $g'(t) = 0$  より

$$0 = \left[ f(t) \right]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ (-1)^k f^{(k)}(t) \frac{(t-x)^k}{k!} \right]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

ここで

$$J = (-1)^n \int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt = (-1)^n \left[ \frac{(t-x)^n}{n!} \right]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき、積分区間における  $f^{(n)}(t)$  の最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とすると

$$K = (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

は  $MJ$  と  $mJ$  の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす  $c$  が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理).

よって、次の等式が成立する (テイラー展開).

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

例えば、 $n$  次多項式  $f(x)$  の  $x^n$  の係数が  $A$  であるとき、次式が成立する.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + A(x-a)^n$$

