平成31年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B　平成31年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $h > 0$ とする．座標平面上の点 O(0, 0)，点 P$(h,\ s)$，点 Q$(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s < t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ p，q，r とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s，t の値を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD，BD，CD の長さをそれぞれ ℓ，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A，B を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 z，w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 8$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 7$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 6$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$，

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a = \dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1) 関数 $f(x) = (x+1)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ は $x > 0$ で減少することを示せ．

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k = M$ となる k をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) O(0, 0)，P(h, s)，Q(h, t) より ($s < t$)

$$p^2 = \mathrm{OP}^2 = h^2 + s^2, \quad q^2 = \mathrm{OQ}^2 = h^2 + t^2, \quad r^2 = \mathrm{PQ}^2 = (t-s)^2$$

$S = \triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}h(t-s)$ であるから

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 - 4\sqrt{3}S &= (h^2+s^2) + (h^2+t^2) + (t-s)^2 - 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}h(t-s) \\ &= 2h^2 - 2\sqrt{3}(t-s)h + 2(s^2 - st + t^2) \\ &= 2\left\{h - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2 + \frac{1}{2}(s+t)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

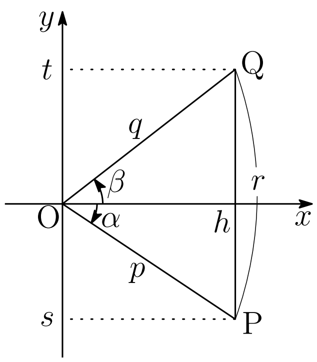
したがって　　$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$

上式において等号が成立するとき

$$h - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-s) = s + t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{s = -\frac{h}{\sqrt{3}},\ t = \frac{h}{\sqrt{3}}}$$

このとき，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \mathrm{PQ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ であるから，△OPQ は正三角形

別解 OP，OQ の偏角をそれぞれ α, β とする．
$\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$



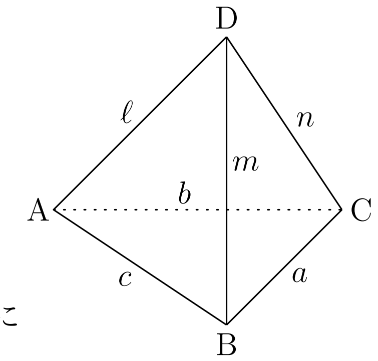
$$\begin{aligned} p^2 &= h^2(1 + \tan^2\alpha) \\ q^2 &= h^2(1 + \tan^2\beta) \\ r^2 &= h^2(\tan\beta - \tan\alpha)^2 \\ S &= \frac{1}{2}h^2(\tan\beta - \tan\alpha) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + q^2 + r^2 - 4\sqrt{3}S}{h^2} &= (1+\tan^2\alpha) + (1+\tan^2\beta) \\ &\quad + (\tan\beta - \tan\alpha)^2 - 2\sqrt{3}(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= \left(\tan\beta - \tan\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &\quad + \left(\tan\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\tan\beta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$，$\beta = \dfrac{\pi}{6}$　すなわち　△OPQ は正三角形

(2) (1) の結果を利用すると



$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ABC} \\ c^2+\ell^2+m^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DAB} \\ a^2+m^2+n^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DBC} \\ b^2+n^2+\ell^2 &\geqq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{DCA} \end{aligned}$$

$T=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{DBC}+\triangle\mathrm{DCA}$ に注意して上の 4 式の辺々を加えると

$$2(a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2) \geqq 4\sqrt{3}T$$

したがって　$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$

また，(1) の結論から，上式において等号が成立するとき，四面体 ABCD は**正四面体**である.

解説 $2s=p+q+r$ とし，3 正数 $s-p$，$s-q$，$s-r$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(s-p)+(s-q)+(s-r)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-p)(s-q)(s-r)} \quad \cdots ①$$

① における等号成立条件は　$s-p=s-q=s-r$　すなわち　$p=q=r$

$$\begin{aligned} \frac{s^4}{27} &\geqq s(s-p)(s-q)(s-r) \\ (2s)^2 &\geqq 12\sqrt{3}\sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)} \\ (p+q+r)^2 &\geqq 12\sqrt{3}S \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$ を $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ に適用すると

$$\begin{aligned} (1^2+1^2+1^2)(p^2+q^2+r^2) &\geqq (1\cdot p+1\cdot q+1\cdot r)^2 \quad \text{(シュワルツの不等式)} \\ 3(p^2+q^2+r^2) &\geqq (p+q+r)^2 \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

③ において等号が成立するとき　$\vec{u}/\!/\vec{v}$　すなわち　$p=q=r$

②，③ より　$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$　(等号が成立とき $p=q=r$)

この幾何不等式を **Weitzenbock** の不等式という.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\quad(*)\quad \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x} \qquad (1 \leqq x \leqq 2)$

$(*)$ の左辺について，$t = xy$ とおくと

y	$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{2}{x}$
t	$1 \longrightarrow 2$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy &= \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t)\frac{1}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log\frac{t}{x}\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\log\frac{t}{x}\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)(\log t - \log x)\,dt - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)(\log t - \log x)\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)\,dt \\
&\qquad - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)\log t\,dt + \frac{\log x}{x}\int_2^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

上式により，$(*)$ の両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned}
-\int_1^x f(t)\log t\,dt - \int_2^x f(t)\log t\,dt + (\log x)\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right) \\
= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots (**)
\end{aligned}$$

$(**)$ の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned}
-2f(x)\log x + \frac{1}{x}\left(\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt\right) + (\log x)\cdot 2f(x) \\
= 6x(\log x - 1) + 3x + A
\end{aligned}$$

上式の両辺を整理して，両辺に x を掛けると

$$\int_1^x f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots (***)$$

$(***)$ に $x = 1,\ 2$ を代入すると

$$\int_2^1 f(t)\,dt = A - 3, \quad \int_1^2 f(t)\,dt = 2A + 24\log 2 - 12$$

これを解いて　$\boldsymbol{A = 5 - 8\log 2}$, $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = -2 + 8\log 2 \quad \cdots ①$

$(**)$ に $x = 1,\ 2$ を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = A + B - 3$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)\int_1^2 f(t)\,dt = 2A + B + 12(\log 2 - 1)$$

上の 2 式に ① を代入すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = (5 - 8\log 2) + B - 3,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt + (\log 2)(-2 + 8\log 2) = 2(5 - 8\log 2) + B + 12(\log 2 - 1)$$

これらをそれぞれ整理すると

$$-\int_2^1 f(t)\log t\,dt = B + 2 - 8\log 2,$$
$$-\int_1^2 f(t)\log t\,dt = B - 2 - 2\log 2 - 8(\log 2)^2$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{B = 5\log + 4(\log 2)^2}$

$(***)$ を微分すると　$2f(x) = 12x\log x + A$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 6x\log x + \frac{5}{2} - 4\log 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z=a+bi$ とおくと ($a,\ b$ は整数)

$$r=\left|\frac{z}{3+2i}\right|=\frac{|a+bi|}{|3+2i|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{13}}$$

r を小さい順に調べると

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき　$r=0$　(1 個)

$(a,\ b)=(\pm1,\ 0),\ (0,\pm1)$ のとき　$r=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm1,\pm1)$ のとき　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\ 0),\ (0,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　(4 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\pm1),\ (\pm1,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$　(8 個)

$(a,\ b)=(\pm2,\pm2)$ のとき　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　(4 個)

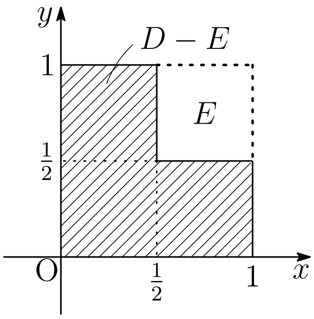
r	0	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$
$N(r)$	1	5	9	13	21	25

よって　$\{r\,|\,10\leqq N(r)<25\}$ は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}}$

(2) 2 つの領域 D，E を次のように定める．

$$D=\{x+yi\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\},$$
$$E=\{x+yi\,|\,\tfrac{1}{2}<x\leqq 1,\ \tfrac{1}{2}<y\leqq 1\}$$

6 つの線分で囲まれる領域は $D-E$ で，右の図の斜線部分である．$z=a+bi$ とおくと



$$\frac{z}{3+2i}=\frac{3a+2b}{13}+\frac{-2a+3b}{13}i$$

これが，領域 D に含まれるとき

$$\begin{cases}0\leqq \frac{3a+2b}{13}\leqq 1\\ 0\leqq \frac{-2a+3b}{13}\leqq 1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases}0\leqq 3a+2b\leqq 13\\ 0\leqq -2a+3b\leqq 13\end{cases}$$

また，領域 E に含まれるとき，a，b が整数であることに注意して

$$\begin{cases}\frac{1}{2}<\frac{3a+2b}{13}\leqq 1\\ \frac{1}{2}<\frac{-2a+3b}{13}\leqq 1\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases}7\leqq 3a+2b\leqq 13\\ 7\leqq -2a+3b\leqq 13\end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$0 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b \leqq 5$$

これらを順次，$(*)$ の 2 式に代入することにより

$b=0$ のとき	$a=0$	(1 個)
$b=1$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=2$ のとき	$a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$	(5 個)
$b=3$ のとき	$a=-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2$	(5 個)
$b=4$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=5$ のとき	$a=1$	(1 個)

したがって，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+5+5+2+1=16 \text{ (個)}$$

$(**)$ の 2 式から a を消去すると (第 1 式 $\times 2+$ 第 2 式 $\times 3$)

$$7 \times 5 \leqq 2(3a+2b)+3(-2a+3b) \leqq 13 \times 5 \quad \text{ゆえに} \quad b=3,\ 4,\ 5$$

これらを順次，$(**)$ の 2 式に代入することにより

$b=3$ のとき	$a=1$	(1 個)
$b=4$ のとき	$a=0,\ 1$	(2 個)
$b=5$ のとき	$a=1$	(1 個)

したがって，$(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数は

$$1+2+1=4 \text{ (個)}$$

求める個数は，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数から $(**)$ を満たす $(a,\ b)$ の個数を引けばよいから

$$16-4=\mathbf{12} \textbf{ (個)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 平面の n 本の直線による最大分割数を s_n とすると $(n = 1, 2, \cdots)$，次の漸化式が成立する．

$$s_1 = 2, \quad s_n = s_{n-1} + n \quad (n \geqq 2)$$

$n \geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} k$ ゆえに $s_n - s_1 = \dfrac{1}{2}n(n+1) - 1$

上の第 2 式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

平面 $H_1, \cdots, H_n$ による空間分割が最大分割であるとき，その最大分割数を r_n とする $(n = 1, 2, \cdots)$．$H_1, \cdots, H_{n-1}$ と H_n との交線による平面 H_n の分割数は s_{n-1} に等しく，空間 $H_1, \cdots, H_{n-1}$ による最大分割数 r_{n-1} は，平面 H_n の分割により s_{n-1} だけ増加するから，次の漸化式が成立する．

$$r_1 = 2, \quad r_n = r_{n-1} + s_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} = \sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}k(k-1) + 1\right\} \\
r_n - r_1 &= \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\} \\
&\qquad\qquad\qquad + \sum_{k=2}^{n}\{k - (k-1)\} \\
r_n - 2 &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + n - 1
\end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立することから

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + n + 1 \\
&= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1
\end{aligned}$$

よって，$T(H_1, \cdots, H_n)$ のとり得る値のうち最も大きいものは

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1}$$

(2) (i) $n=2$のとき

$$T(H_1,H_2)=\begin{cases} 4 & (H_1\text{と }H_2\text{が平行でない}) \\ 3 & (H_1\text{と }H_2\text{が平行}) \end{cases}$$

よって，$T(H_1,H_2)$のとり得る値で，2番目に大きいものは　3

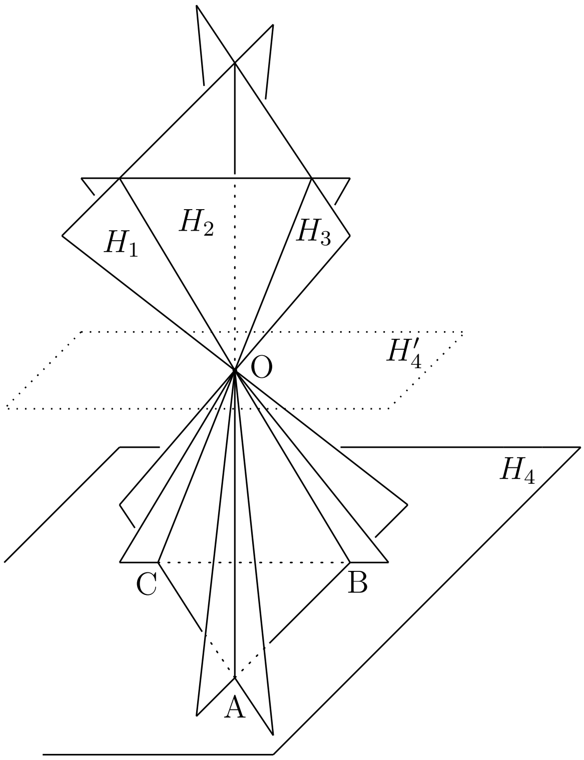
(ii) $n=3$のとき，(1)の結果および問題文にある具体例1，2から，$T(H_1,H_2,H_3)$のとり得る最大値および2番目に大きい値は，それぞれ8，7である．
よって，$T(H_1,H_2,H_3)$のとり得る値で，2番目に大きいものは　7

(iii) 問題文にある具体例4では，閉領域

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad z \geqq 0,\quad x+y+z \leqq 1$$

が存在し，$H_4: x+y+z=1$を平行移動した平面$H_4': x+y+z=0$に移動することで，この閉領域は退化するから

$$T(H_1,H_2,H_3,H_4')=T(H_1,H_2,H_3,H_4)-1=15-1=14$$



$n \geqq 4$のとき，境界をもつ閉領域が存在し，閉領域(四面体OABC)の頂点の1つをOとし，Oの対面に相当する平面(平面ABC)をOを通る平面に移動することで，この閉領域は退化する．

(i)〜(iii)から，求める値は　$r_n-1=\boldsymbol{\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n}$

(3) 平面 $H_1,\ H_2, \cdots,\ H_n$ は，空間の最大分割を与えるものとする．

i) $n \geqq 5$ のとき，閉領域は複数あるため，(2) で行った閉領域の頂点への平面の移動により，その閉領域を退化させることができる．その平面の移動を 2 回行うことで，$T(H_1, H_2, \cdots, H_n)$ のとり得る値で 3 番目に大きいものは

$$r_n - 2 = \frac{1}{6}n^3 - \frac{5}{6}n - 1$$

ii) $n = 3$ のとき，(1) の結果および問題文にある具体例 1，2，3 から，$T(H_1, H_2, H_3)$ のとり得る最大値，2 番目および 3 番目に大きい値は，それぞれ 8，7，6 である．

iii) $n = 4$ のとき，問題文の具体例 4 および (2)(iii) で示した閉領域をもつとき，空間分割数はその最大値 15 をとる．$T(H_1, H_2, H_3, H_4)$ が最大値以外の値をとるとき，この閉領域が退化する A)，B) の場合がある．

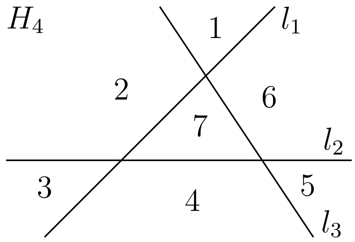
A) (2) で示したように閉領域が 1 つ退化して，4 平面の共有点 O が，各平面の中心となるとき，その分割数は 14 で，さらに領域を退化させるとき，O に関する対称性により，領域は偶数個ずつ減少するから，空間分割数が 13 になることはない (分割数は偶数)．

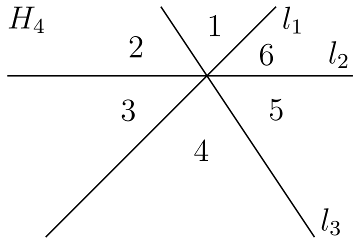
B) (2) で示した図で 3 平面 $H_1,\ H_2,\ H_3$ の共有点 O を解消する (領域が 1 つ減る)，すなわち，$H_1,\ H_2$ の交線と $H_2,\ H_3$ の交線を平行にとるとき ($H_1,\ H_3$ の交線もこれと平行)，その空間分割数は，H_4 に関して同数 (分割数は偶数個) であることに注意して (左下の図)

$$15 - 1 = 7 \times 2 = 14$$

$H_1,\ H_2,\ H_3$ の H_4 との交線を，それぞれ，$l_1,\ l_2,\ l_3$ とする．特に，$l_1,\ l_2,\ l_3$ が 1 点で交わるとき，その空間分割数は (右下の図)

$$6 \times 2 = 12$$





i)〜iii) から，求める値は
$$\boldsymbol{\begin{cases} \dfrac{1}{6}n^3 + \dfrac{5}{6}n - 1 & (n \neq 4) \\ 12 & (n = 4) \end{cases}}$$

空間の最大分割数

非負の整数 $p,\ q$ について，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & (p < q) \\ {}_p\mathrm{C}_q & (p \geqq q) \end{cases}$ とすると

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ q+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix}$$

(1) で求めた平面の直線による最大分割数 s_n は

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1)+1 = 1+n+\frac{1}{2}n(n-1) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$$

空間の平面による最大分割数 r_n は，$r_1 = 2,\ r_n = r_{n-1} + s_{n-1}\ (n \geqq 2)$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(r_k - r_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} \\
r_n - 2 &= \sum_{k=2}^{n}\left\{1 + \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= 1+n+\sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 1+n+\sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n}\left\{\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \\
r_n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

m 次元空間における n 個の余次元 $1(m-1$ 次元$)$ の超平面による最大分割数は

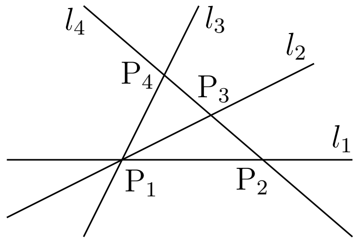
$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

である (帰納法により示すことができる).

平面の直線による分割

平面の n 本の直線による分割について $(n \geqq 2)$，オイラーの多面体定理[1] を用いた証明を与える．交点の総数を p，直線が交点で分断される線分の総数を S'，半直線の総数を S'' とし，$S = S' + S''$ とする．境界がすべて線分である領域を閉領域，半直線を境界に持つ領域を開領域という．閉領域，開領域の総数を，それぞれ R'，R'' とし，$R = R' + R''$ とおく．

交点の重複度を与える関数を λ とする．例えば，右の図における P_k の重複度は次のようになる．



$$\lambda(\mathrm{P}_1) = 3, \quad \lambda(\mathrm{P}_2) = \lambda(\mathrm{P}_3) = \lambda(\mathrm{P}_4) = 2$$

l_1 上には交点が 2 個，線分が 1 個あり，l_4 上には交点が 3 個，線分が 2 個ある (交点の数=線分の数 +1).

一般に，n 本の直線について，交点の個数および線分の本数の総和を求めると

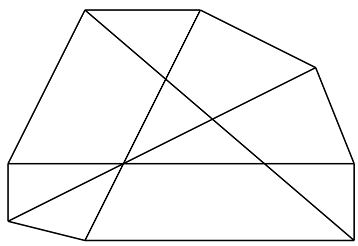
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) = S' + n$$

また，半直線の本数および開領域の個数は，半直線が放射状に伸びた部分から

$$S'' = 2n, \quad R'' = 2n$$

$S = S' + S''$ より　　$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n$

右の図のように，n 本の半直線上に点をとり，それらを結んでできる図形を考え，その周囲の辺を底面とする立体を考える．その立体の頂点，辺，領域の数は，それぞれ $p + 2n$，$S + 2n$，$R + 1$ となる．これをオイラーの多面体定理に適用すると



$$(p + 2n) - (S + 2n) + (R + 1) = 2$$

よって

$$\begin{aligned} R &= 1 - p + S = 1 - p + \sum_{k=1}^{p} \lambda(\mathrm{P}_k) + n \\ &= 1 + n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\}, \\ R' &= 1 - n + p + \sum_{k=1}^{p} \{\lambda(\mathrm{P}_k) - 2\} \end{aligned}$$

重複度が 3 以上の交点について，その重複を 1 つ解消する (-1) ごとに p が 2 増えるから，すべての交点の重複度が 2 のとき，R は最大となり，このとき $p = {}_n\mathrm{C}_2$.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2016_10_19.pdf を参照.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ より $(x>0)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}\\&=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\int_x^{x+1}\frac{dt}{x}=\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right)dt<0\end{aligned}$$

よって，関数 $f(x)$ は $x>0$ で単調減少．

(2) $a=\dfrac{2^8}{3^4}$．数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

$b_k>0$ に注意して，両辺の自然対数をとると

$$\log b_k=(k+1)\log(k+1)-k\log a-\log k!$$

ゆえに $\quad\log b_{k+1}=(k+2)\log(k+2)-(k+1)\log a-\log(k+1)!$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\log b_{k+1}-\log b_k&=(k+2)\log(k+2)-(k+2)\log(k+1)-\log a\\&=(k+2)\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)-\log a\\&=f(k+1)-\log a\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$2^2>\dfrac{2^8}{3^4}>e$，$f(1)=2\log 2$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(k+1)=1$ および (1) の結論により

$$f(k+1)-\log a=0$$

を満たす k はただ一つ存在し，実際，$k+1=3$ のとき

$$\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}-\log\left(\frac{4}{3}\right)^4=0$$

$(*)$ より $\quad b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$

よって $\quad b_k=M$ となる k は $\qquad \boldsymbol{k=2,\ 3}$

$$M=b_2=\frac{3^3}{a^2 2!}=\frac{3^3}{2}\left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3^{11}}{2^{17}}}\qquad\left(=\frac{177147}{131072}\right)$$

補足 $g(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ とすると $(x>0)$

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\
&=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\\
&=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\int_x^{x+1}\frac{dt}{x+1}=\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+1}\right)dt>0
\end{aligned}$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ で単調増加．また

$$f(x)-g(x)=(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=0$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)$　$\cdots$(A)

$f'(x)<0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}<0$　ゆえに　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1$

$g'(x)>0$ より　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}>0$　ゆえに　$1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

上の 2 式から　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$G(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とおくと

$$G(x)<e<F(x)$$

(A) より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}G(x)=\lim_{x\to\infty}F(x)$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}G(x)=\lim_{x\to\infty}F(x)=e$$

さらに，$G(x)=F(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}G(x)=\lim_{x\to-\infty}F(-x-1)=\lim_{x\to\infty}F(x-1)=e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}G(x)=e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}G(x)=e$ であるから [2]

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

[2] 数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．