平成30年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B　平成30年2月25日

1 a，b，c を実数とし，3つの2次方程式

$$\begin{aligned} x^2+ax+1=0 \quad &\cdots ① \\ x^2+bx+2=0 \quad &\cdots ② \\ x^2+cx+3=0 \quad &\cdots ③ \end{aligned}$$

の解を複素数平面上で考察する．

(1) 2つの方程式 ①，② がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a，b を用いて表せ．

(2) 3つの方程式 ①，②，③ がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．

2 次の問に答えよ．

(1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ．

(2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ．

3 方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ．

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ．

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて a_1，a_2，a_3，$\cdots$ とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1, \quad |z| \leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を ℓ とする．

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする．また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする．L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ．

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする．点 X は頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する．X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p，q，r である．ただし

$$p \geqq 0, \quad q \geqq 0, \quad r \geqq 0, \quad p+q+r=1$$

である．X が n 秒後に頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

(1) a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p，q，r を用いて表せ．

(2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を p，q，r，n を用いて表せ．

(3) a_n を p，q，r，n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2+ax+1=0\cdots$①，$x^2+bx+2=0\cdots$②，$x^2+cx+3=0\cdots$③

$a,\ b$ は実数で，①，② は実数解を持たないから，① の 2 解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とし，② の 2 解を $\beta,\ \overline{\beta}$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a,\quad \alpha\overline{\alpha}=1,\quad \beta+\overline{\beta}=-b,\quad \beta\overline{\beta}=2\quad\cdots(*)$$

したがって　$\mathrm{Re}(\alpha)=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\dfrac{a}{2},\quad \mathrm{Re}(\beta)=\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}=-\dfrac{b}{2}$

(i) $a=b$ のとき，$\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，このとき，4 点 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ は点 $-\dfrac{a}{2}$ を通り虚軸に平行な直線上にある．

(ii) $a\neq b$ のとき，2 点 $\alpha,\ \overline{\alpha}$ を通る円の中心は実軸上にあり，2 点 $\beta,\ \overline{\beta}$ を通る円の中心も実軸上にある．この円の中心を k とすると (k は実数)，次式を満たすとき，4 点 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を通る円が存在する．

$$|\alpha-k|=|\beta-k|\quad \text{ゆえに}\quad \alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k=\beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k$$

$(*)$ により　$1+ak=2+bk$　ゆえに　$k=\boldsymbol{\dfrac{1}{a-b}}$

また，この円の半径を r とすると

$$\begin{aligned} r^2&=|\alpha-k|^2=\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k+k^2\\ &=1+ak+k^2=1+\frac{a}{a-b}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{2a^2-3ab+b^2+1}{(a-b)^2}\end{aligned}$$

よって　　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2a^2-3ab+b^2+1}}{|a-b|}}$

(2) ③ の 2 解を $\gamma,\ \overline{\gamma}$ とすると　$\gamma+\overline{\gamma}=-c,\quad \gamma+\overline{\gamma}=3\quad\cdots(**)$

$b=c$ のとき，(i) と同様にして，$\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\gamma)$ となる．このとき，4 点 $\beta,\ \overline{\beta},\ \gamma,\ \overline{\gamma}$ は同一直線上にあり，不適．

したがって，$b\neq c$ のとき，(ii) の結果および次式を満たせばよい．

$$|\beta-k|=|\gamma-k|\quad \text{ゆえに}\quad \beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k=\gamma\overline{\gamma}-(\gamma+\overline{\gamma})k$$

$(*)$，$(**)$ により　$2+bk=3+ck$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{b-c}$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式および (ii) から

$$\boldsymbol{a^2-4<0,\quad b^2-8<0,\quad c^2-12<0,\quad a-b=b-c\neq 0}$$

注意 解答を $\boldsymbol{a^2<4,\ b^2<8,\ c^2<12,\ a\neq b,\ a+c=2b}$ としてもよい．

別解 $\lambda_1 = a$，$\lambda_2 = b$，$\lambda_3 = c$ とおく．

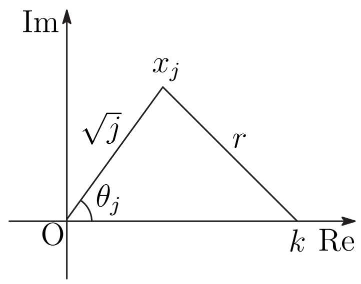
$x^2 + \lambda_1 x + 1 = 0 \cdots ①$，$x^2 + \lambda_2 x + 2 = 0 \cdots ②$，$x^2 + \lambda_3 x + 3 = 0 \cdots ③$

①，②，③ は実数解を持たないから

$$\lambda_j = -2\sqrt{j}\cos\theta_j \quad (0 < \theta_j < \pi)$$
$$x_j = \sqrt{j}\,(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とおくと，x_1，$\overline{x}_1$ は ① の解，x_2，$\overline{x}_2$ は ② の解，x_3，$\overline{x}_3$ は ③ の解である．

6 点 x_j，$\overline{x_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ の実軸に関する対称性により，この 6 点を通る円の中心を k(k は実数)，半径を r とする．右の図の三角形に余弦定理を適用すると



$$r^2 = j + k^2 - 2|k|\sqrt{j}\cos\theta_j$$
$$r^2 - k^2 = j + |k|\lambda_j$$

これに $j = 1, 2, 3$ を代入すると

$$r^2 - k^2 = 1 + |k|a = 2 + |k|b = 3 + |k|c$$

したがって　$|k|(a - b) = |k|(b - c) = 1$

①，②，③ が実数解を持たないことと上式から

$$a^2 - 4 < 0, \quad b^2 - 8 < 0, \quad c^2 - 12 < 0, \quad a - b = b - c \neq 0$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $35x + 91y + 65z = 3$ は，$5{\cdot}7x + 7{\cdot}13y + 5{\cdot}13z = 3 \quad \cdots(*)$

$$35x \equiv 3 \pmod{13}, \quad 91y \equiv 3 \pmod{5}, \quad 65z \equiv 3 \pmod{7}$$

ゆえに　$x \equiv 9 \pmod{13}$，$y \equiv 3 \pmod{5}$，$z \equiv 5 \pmod{7}$

整数 a，b，c を用いて

$$x = 9 + 13a, \quad y = 3 + 5b, \quad z = 5 + 7c \quad \cdots(**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入すると　$5{\cdot}7(9 + 13a) + 7{\cdot}13(3 + 5b) + 5{\cdot}13(5 + 7c) = 3$

整理すると　$a + b + c = -2$

$a = b = -1,\ c = 0$ とすると　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$

(2) $|x| \geqq 4$ (等号は $x = -4$ のとき)，$|y| \geqq 2$ (等号は $y = -2$ のとき) であるから，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4, -2,\ 5)}$ のとき，$x^2 + y^2$ の最小値は　**20**

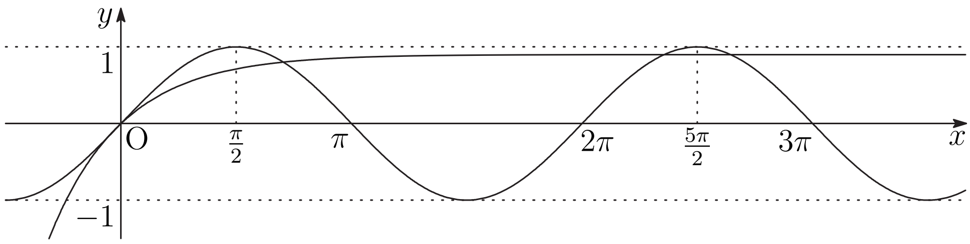
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ を変形すると　$1-e^{-x}=\sin x$　$\cdots(*)$

$(*)$ より，$f(x)=1-e^{-x}-\sin x$ とおくと　$f'(x)=e^{-x}-\cos x$

$$f(0)=0,\ x<0 \text{ のとき } f'(x)>0$$

$x<0$ において $f(x)<0$ であるから，$x<0$ において $(*)$ の解はない．

$x>0$ において，$0<1-e^{-x}<1$．基本周期 2π の周期関数 $\sin x$ の値域は $-1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから，$(*)$ の正の解は無限個ある．



(2) $f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(\pi)>0$ より　$\frac{\pi}{2}<a_1<\pi$

k を自然数とすると

$$f(2k\pi)>0,\quad f\left(\left(2k+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right)<0,\quad f((2k+1)\pi)>0$$

ゆえに　$2k\pi<a_{2k}<(2k+\frac{1}{2})\pi<a_{2k+1}<(2k+1)\pi$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\pi=m^2\pi$$
$$\sum_{k=1}^{m}a_{2k}>\sum_{k=1}^{m}2k\pi=m(m+1)\pi$$

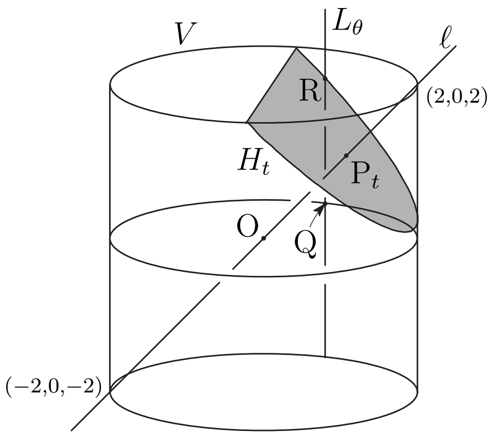
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}<\sum_{k=1}^{m}a_{2k}$ であるから　$\displaystyle 2m^2\pi<\sum_{k=1}^{2m}a_k<2m(m+1)\pi$

$$\frac{\pi}{2}<\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m}a_k<\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m)^2}\sum_{k=1}^{2m}a_k=\frac{\pi}{2}\quad\text{よって}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を Q とし，Q を通り z 軸に平行な直線 L_θ と平面 H_t の交点を $\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ z_\mathrm{R})$ とすると，$\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ z_\mathrm{R} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1)$ とすると，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = 0$ であるから

$$1\left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 1\left(z_\mathrm{R} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \text{よって} \quad z_\mathrm{R} = \boldsymbol{\sqrt{2}t - 2\cos\theta}$$

(2) (1) の結果から $\qquad \overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}} = \left(2\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2 &= \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sin^2\theta + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)^2 \\
&= 7\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + 1 \\
&= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}t}{7}\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7}
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{R}}|^2$ の最小値を r^2 とすると

$$r^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{7} & \left(|t| \leqq \dfrac{7}{2\sqrt{2}}\right) \\ (|t| - 2\sqrt{2})^2 & \left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}} \leqq |t| \leqq 1\right) \end{cases}$$

よって，求める回転体の体積は，r^2 が t に関する偶関数であるから

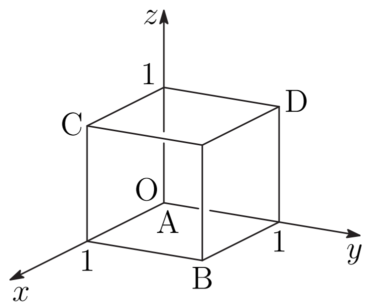
$$\begin{aligned}
&2\pi\int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right)dt + 2\pi\int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}(t - 2\sqrt{2})^2\,dt \\
&= 2\pi\left[\ t - \frac{t^3}{21}\ \right]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \frac{2\pi}{3}\left[\ (t - 2\sqrt{2})^3\ \right]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi}
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (1) X が n 秒後に A，B，C，D にある確率がそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n より

$$n\text{ が偶数のとき}\quad a_n+b_n+c_n+d_n=1$$

$$n\text{ が奇数のとき}\quad a_n=b_n=c_n=d_n=0$$

X が $n+2$ 秒後に A にあるとき，X は n 秒後に 4 点 A，B，C，D のいずれかある．このとき，これらの 4 点から A に移動する確率は



(i) X が n 秒後に A にあるとき　$p^2+q^2+r^2$

(ii) X が n 秒後に B にあるとき　$2pq$

(iii) X が n 秒後に C にあるとき　$2rp$

(iv) X が n 秒後に D にあるとき　$2qr$

よって，次の確率漸化式が成立する．

$$\boldsymbol{a_{n+2}=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2rpc_n+2qrd_n}$$

(2) (1) と同様にして，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$c_{n+2}=2rpa_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n$$

上式および (1) の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
a_{n+2}+c_{n+2}&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(b_n+d_n)\\
&=(p^2+q^2+r^2+2rp)(a_n+c_n)+(2pq+2qr)(1-a_n-c_n)\\
&=(p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)(a_n+c_n)+2q(p+r)\\
&=(p-q+r)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)\\
&=(1-2q)^2(a_n+c_n)+2q(1-q)
\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+2}+c_{n+2}-\dfrac{1}{2}=(1-2q)^2\left(a_n+c_n-\dfrac{1}{2}\right)$

n が偶数のとき，$a_0=1$，$c_0=0$ より

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=(1-2q)^n\cdot\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad a_n+c_n=\frac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$$

$a_n-b_n+c_n-d_n=a_n+c_n-(b_n+d_n)=2(a_n+c_n)-1$ より

$$\boldsymbol{a_n-b_n+c_n-d_n=\begin{cases}(1-2q)^n & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}}$$

(3) b_{n+2}，c_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表すと

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qrc_n + 2rpd_n \quad \cdots ①$$
$$d_{n+2} = 2qra_n + 2rpb_n + 2pqc_n + (p^2+q^2+r^2)d_n \quad \cdots ②$$

これらは (1),(2) で求めた確率漸化式

$$a_{n+2} = (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n$$
$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pqd_n$$

に対して，① は b_n (b_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と r を交換したものであり，② は d_n (d_{n+2}) と c_n (c_{n+2})，q と p を交換したものである．$b_0=0$，$d_0=0$ であるから，(2) と同様にして

$$a_n + b_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2r)^n\}$$
$$a_n + d_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$$

上の 2 式と $a_n + c_n = \dfrac{1}{2}\{1+(1-2q)^n\}$ の辺々を加えると

$$2a_n + (a_n+b_n+c_n+d_n) = \frac{1}{2}\{3+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$

$a_n+b_n+c_n+d_n = 1$ であるから

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\{1+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\} & (n\ \textbf{が偶数}) \\ 0 & (n\ \textbf{が奇数}) \end{cases}}$$

補足 a_n を求めたことにより，a_n+b_n，a_n+c_n，a_n+d_n の結果により，n が偶数のとき

$$b_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n-(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$
$$c_n = \frac{1}{4}\{1-(1-2p)^n+(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$
$$d_n = \frac{1}{4}\{1+(1-2p)^n-(1-2q)^n-(1-2r)^n\}$$