平成 29 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　平成 29 年 2 月 25 日

1 次の条件 (i)，(ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ．

(i) N の正の約数の個数は 12 個

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12．

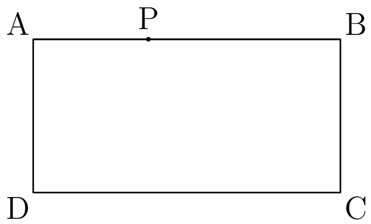
ただし，N の約数には 1 と N も含める．

2 実数 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ．

3 a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD = 1，AB = a である．P を辺 AB 上の点とし，AP = x とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1) S を a と x で表せ．

(2) $a = 1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．(白紙は回収しない．)

4 n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 a，b，c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ N の約数が 12 個あり，N が $2^2{\cdot}3$ を約数をもつことから，N は次の積で表される (p は 5 以上の素数).

(a) $N = 2^5{\cdot}3$　(b) $N = 2^3{\cdot}3^2$　(c) $N = 2^2{\cdot}3^3$　(d) $N = 2^2{\cdot}3p$

(a) $N = 2^5{\cdot}3 = 96$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$$

(b) $N = 2^3{\cdot}3^2 = 72$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12$$

(c) $N = 2^2{\cdot}3^3 = 108$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12$$

(d) 条件 (ii) を満たす p は 5，7，11 のいずれかである.
$p = 5$ のとき，$N = 2^2{\cdot}3{\cdot}5 = 60$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12$$

$p = 7$ のとき，$N = 2^2{\cdot}3{\cdot}7 = 84$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12$$

$p = 11$ のとき，$N = 2^2{\cdot}3{\cdot}11 = 132$ の 12 以下の正の約数は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 11,\ 12$$

(a)～(d) から，条件 (ii) を満たす正の整数 N は　**84，96，108，132**

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ より　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$

第 2 式について，$t=u+\pi$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=1$

t	$x+\pi \longrightarrow x+\frac{3}{2}\pi$
u	$x \longrightarrow x+\frac{\pi}{2}$

ゆえに　$f(x+\pi)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}\,du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du=f(x)$

$f(x)$ は，周期 π の周期関数であるから，$0\leqq x\leqq\pi$ において求めればよい．

(i)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt\quad\cdots(*)$

$$f'(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1-\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$f(x)=\displaystyle\int_x^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt\quad\cdots(**)$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$
$$=-\frac{(\sin x+\cos x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで　$\displaystyle\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt=\int\frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t}+\frac{\sin t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)dt$

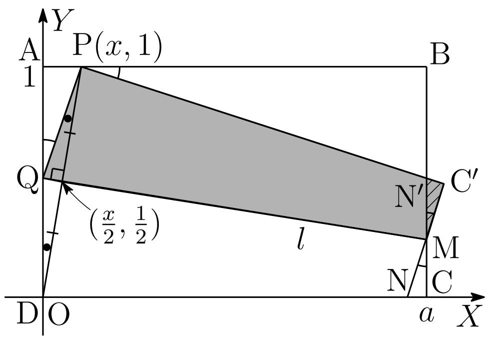
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

$F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right)$ とおくと，$(*)$，$(**)$ より

最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log 3}$

最小値 $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=2F(\pi)-F\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)-F\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\log(\sqrt{2}+1)-\log 3\right\}}$

3 (1) 右の図のように四角形 ABCD を XY 座標平面上に定め，原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\ 1)$ を結ぶ線分 OP の垂直二等分線を l とすると，その方程式は



$$Y-\frac{1}{2}=-x\left(X-\frac{x}{2}\right)$$

$$l: 2xX+2Y-x^2-1=0$$

l と X 軸との交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2+1}{2x}$

(i) $a \leqq \dfrac{x^2+1}{2x}$，$0 \leqq x \leqq a$　すなわち　$0 \leqq x \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

l と直線 $X=a$ の交点の Y 座標は　$Y=\dfrac{x^2-2ax+1}{2}$

$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とおくと，$\angle\mathrm{AQP}=2\theta$ より

$$\tan\theta=x \quad \text{ゆえに} \quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$$

上図で，$\triangle\mathrm{MNC}\equiv\triangle\mathrm{MN'C'}$，$\angle\mathrm{NMC}=2\theta$，$\mathrm{NC}=\mathrm{MC}\tan 2\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{MC}\cdot\mathrm{NC}=\frac{1}{2}\mathrm{MC}^2\tan 2\theta$$

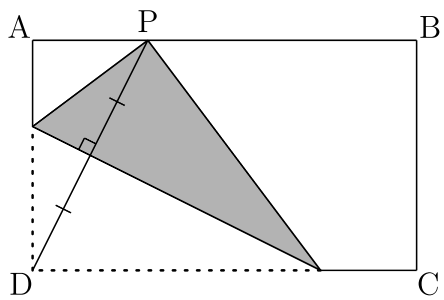
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2ax+1}{2}\right)^2\frac{2x}{1-x^2}=\boldsymbol{\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}}$$

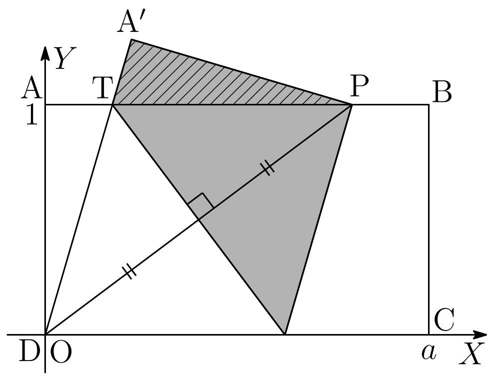
(ii) $\dfrac{x^2+1}{2x} \leqq a$，$0 \leqq x \leqq 1$　すなわち　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{S=0}$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき，l と直線 $Y=1$ の交点の X 座標は　$X=\dfrac{x^2-1}{2x}$

$$S=\triangle\mathrm{A'TP}=\triangle\mathrm{ATO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AT}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{x^2-1}{2x}=\boldsymbol{\frac{x^2-1}{4x}}$$





(2) (1) の結果から，$a=1$ のとき

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$0<x<1$ のとき，両辺の自然対数をとると

$$\log S=\log x+3\log(1-x)-\log(1+x)-\log 4$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}\frac{S'}{S}&=\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}-\frac{1}{1+x}\\&=\frac{(1-x)(1+x)-3x(1+x)-x(1-x)}{x(1+x)(1-x)}\\&=-\frac{3x^2+4x-1}{x(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$

ゆえに　$S'=-\dfrac{3x^2+4x-1}{x(1+x)(1-x)}\cdot\dfrac{x(1-x)^3}{4(1+x)}=-\dfrac{(3x^2+4x-1)(1-x)^2}{4(1+x)^2}$

$0<x<1$ に注意して，$S'=0$ を解くと　$x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$

したがって，S の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，S を最大にする x は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 集合 A_n のうち n 番目の文字が a または b である文字列の個数を x_n，n 番目の文字が c である文字列の個数を y_n とすると，次の漸化式が成立する．

$$x_1=2,\ y_1=1 \qquad (*)\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+2y_n \\ y_{n+1}=x_n \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

漸化式から　$x_{n+1}-\lambda y_{n+1}=(2-\lambda)x_n+2y_n \quad \cdots (**)$

ここで，$1:-\lambda=2-\lambda:2$ とすると

$$-\lambda(2-\lambda)=1\cdot 2 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda^2-2\lambda-2=0$$

この 2 次方程式の解を α，β とすると $(\alpha>\beta)$

$$\alpha=1+\sqrt{3}, \quad \beta=1-\sqrt{3}$$

とすると，$2-\alpha=\beta$，$2-\beta=\alpha$ であるから，$(**)$ より

$$x_{n+1}-\alpha y_{n+1}=\beta(x_n-\alpha y_n)$$
$$x_{n+1}-\beta y_{n+1}=\alpha(x_n-\beta y_n)$$

したがって　$x_n-\alpha y_n=\beta^{n-1}(x_1-\alpha y_1)=\beta^n$

$$x_n-\beta y_n=\alpha^{n-1}(x_1-\beta y_1)=\alpha^n$$

上の 2 式から　$x_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，$y_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$

$$x_n+y_n=\frac{(\alpha+1)\alpha^n-(\beta+1)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ここで，$\alpha+1=\dfrac{\alpha^2}{2}$，$\beta+1=\dfrac{\beta^2}{2}$ であるから

$$x_n+y_n=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{2(\alpha-\beta)} \quad \cdots ①$$

よって　$P(n)=\dfrac{x_n+y_n}{3^n}=\dfrac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{2(\alpha-\beta)3^n}$

$$=\boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{3})^{n+2}-(1-\sqrt{3})^{n+2}}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}}$$

(2) ① より，A_n の個数を a_n とすると　$a_n = \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{2(\alpha - \beta)}$

$(*)$ より，7 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	$\cdots$	$2y_7x_{n-8}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$\cdots$	$2y_7y_{n-8}$

$x_9 = 2y_7x_1$，$y_9 = 2y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$2y_7a_{n-8}$

同様に，7 番目と 10 番目の文字が c であるとき

k	1	$\cdots$	7	8	9	10	11	12	$\cdots$	n
x_k	2	$\cdots$	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$16y_7$	$\cdots$	$8y_7x_{n-11}$
y_k	1	$\cdots$	y_7	0	$2y_7$	$4y_7$	0	$8y_7$	$\cdots$	$8y_7y_{n-11}$

$x_{12} = 8y_7x_1$，$y_{12} = 8y_7y_1$ であるから，このときの場合の数は　$8y_7a_{n-11}$

したがって　$Q(n) = \dfrac{8y_7a_{n-11}}{2y_7a_{n-8}} = \dfrac{4(\alpha^{n-9} - \beta^{n-9})}{\alpha^{n-6} - \beta^{n-6}}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}\right\}}{\alpha^3 - \beta^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}} = \frac{4}{\alpha^3}$

$\alpha\beta = -2$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4\beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{4(1-\sqrt{3})^3}{(-2)^3} = \mathbf{3\sqrt{3} - 5}$

発展 行列を用いると，$(*)$ は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 番目が c であるとき，9 番目に注目して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 4y_7 \\ 2y_7 \end{pmatrix} &= 2y_7\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2y_7\begin{pmatrix} x_{n-8} \\ y_{n-8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このときの場合の数は　$2y_7(x_{n-8} + y_{n-8}) = 2y_7a_{n-8}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) (必要性) $f(x)=0$ が虚数解をもつことが必要であるから，係数について

$$c^2-4<0 \quad \text{すなわち} \quad -2<c<2$$

実係を係数とする方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，それらは互いに共役であるから，その2解を z，$\overline{z}$ とおくと，解と係数の関係により

$$z\overline{z}=1 \quad \text{すなわち} \quad |z|=1$$

したがって，z と $\overline{z}$ は T 上にある．

(十分性) T 上にある2数 z，$\overline{z}$ を解とする2次方程式は

$$x^2-(z+\overline{z})x+z\overline{z}=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-2\mathrm{Re}(z)x+1=0$$

$-1<\mathrm{Re}(z)<1$ であるから，$c=-2\mathrm{Re}(z)$ とおくと　$-2<c<2$

よって，求める必要十分条件は　　$\boldsymbol{-2<c<2}$

(2) 次数を係数とする方程式 $F(x)=0$ の解が T 上にあるとき，(1) の結果から，これらの解を α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおける ($|\alpha|=|\beta|=1$).
x^4 の係数が1であることに注意して，因数定理を用いると

$$\begin{aligned}F(x)&=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})\\&=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+|\alpha|^2\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+|\beta|^2\}\\&=\{x^2-2\mathrm{Re}(\alpha)x+1\}\{x^2-2\mathrm{Re}(\beta)x+1\}\end{aligned}$$

$c_1=-2\mathrm{Re}(\alpha)$，$c_2=-2\mathrm{Re}(\beta)$ とすると　$-2<c_1<2$，$-2<c_2<2$

よって　$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$　$(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$

(3) $$F(x) = (x^2 + c_1 x + 1)(x^2 + c_2 x + 1)$$
$$= x^4 + (c_1 + c_2)x^3 + (c_1 c_2 + 2)x^2 + (c_1 + c_2)x + 1$$

これと $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ の同じ次数の項の係数を比較すると

$$c_1 + c_2 = a, \quad c_1 c_2 = b - 2 \quad \cdots (*)$$

c_1，c_2 を解とする 2 次方程式は　$x^2 - ax + b - 2 = 0$

この方程式は，実数解をもつから

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1(b - 2) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq \frac{a^2}{4} + 2 \quad \cdots ①$$

$-2 < c_1 < 2$，$-2 < c_2 < 2$ より

$$-4 < c_1 + c_2 < 4, \quad (c_1 + 2)(c_2 + 2) > 0, \quad (c_1 - 2)(c_2 - 2) > 0$$

第 1 式に $(*)$ を適用すると　　$-4 < a < 4 \quad \cdots ②$

第 2 式を展開すると　　$c_1 c_2 + 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

これに $(*)$ を適用すると

$$b - 2 + 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > -2a - 2 \quad \cdots ③$$

第 3 式を展開すると　　$c_1 c_2 - 2(c_1 + c_2) + 4 > 0$

これに $(*)$ を適用すると

$$b - 2 - 2a + 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > 2a - 2 \quad \cdots ④$$

①〜④ より，点 $(a,\ b)$ の満たす領域は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-4 < a < 4} \\ \boldsymbol{b \leqq \dfrac{a^2}{4} + 2} \\ \boldsymbol{b > -2a - 2} \\ \boldsymbol{b > 2a - 2} \end{cases}$$

ただし，境界は実線部のみ．