平成28年度　東京工業大学　２次試験前期日程(数学問題)180分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B　平成28年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 aを正の定数とし，放物線$y=\dfrac{x^2}{4}$をC_1とする．

(1) 点PがC_1上を動くとき，Pと点Q$\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$の距離の最小値を求めよ．

(2) Qを中心とする円$(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$を$C_2$とする．Pが$C_1$上を動き，点Rが$C_2$上を動くとき，PとRの距離の最小値を求めよ．

2 △ABCを一辺の長さ6の正三角形とする．サイコロを3回振り，出た目を順にX，Y，Zとする．出た目に応じて，点P，Q，Rをそれぞれ線分BC，CA，AB上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたすように取る．

(1) △PQRが正三角形になる確率を求めよ．

(2) 点B，P，Rを互いに線分で結んでできる図形をT_1，点C，Q，Pを互いに線分で結んでできる図形をT_2，点A，R，Qを互いに線分で結んでできる図形をT_3とする．T_1，T_2，T_3のうち，ちょうど2つが正三角形になる確率を求めよ．

(3) △PQRの面積をSとし，Sのとりうる値の最小値をmとする．mの値および$S=m$となる確率を求めよ．

3 水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している．

(1) S_1，S_2がαと接する点をそれぞれP_1，P_2とする．線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の長さを求めよ．

(2) αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接している球すべてを考える．それらの球とαの接点は，1つの円の上または1つの直線の上にあることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 2 以上の自然数とする．

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_1 上の点Pを $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$f(t) = \mathrm{PQ}^2$ とする．$a>0$ より，$\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の x 座標は正であり，C_1 は y 軸に関して対称であるから，PQ の距離が最小となるのは，$t \geqq 0$ のときについて調べればよい．

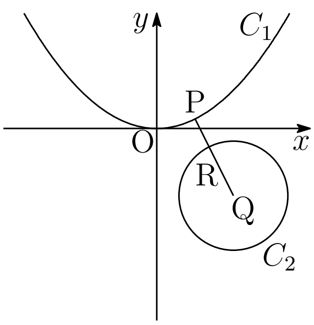
$$\begin{aligned} f(t) &= (t-2a)^2 + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 \\ f'(t) &= 2(t-2a) + 2\left(\frac{t^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 2\right)\cdot\frac{t}{2} \\ &= \frac{t^3}{4} - \frac{a^2}{4}t + 4t - 4a \\ &= \frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16) \end{aligned}$$

このとき，$t^2+at+16>0$ であることに注意して

t	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小 a^2+4	$\nearrow$

よって，求める最小値は $\sqrt{f(a)} = \boldsymbol{\sqrt{a^2+4}}$

(2) $C_2 : (x-2a)^2 + \left(y - \dfrac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$ の半径が $\sqrt{2}a$ であるから (1) の結果に注意して



$\sqrt{2}a \geqq \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$a \geqq 2$ のとき

PR の最小値 0

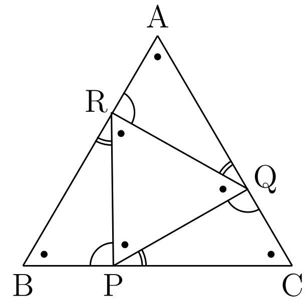
$\sqrt{2}a < \sqrt{a^2+4}$，すなわち，$0<a<2$ のとき

PR の最小値 $\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

よって，PR の最小値は $\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq 2} & \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0<a<2} & \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a} \end{cases}$

■

2 (1) △PQR が正三角形のとき



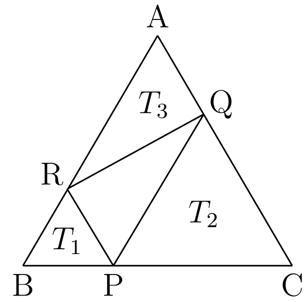
$$\triangle\mathrm{BPR} \equiv \triangle\mathrm{CQP} \equiv \triangle\mathrm{ARQ}$$

であるから，BP = CQ = AR

したがって　　$X = Y = Z$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) T_1 と T_2 だけが正三角形であるとき



$$\mathrm{RB} = \mathrm{BP},\quad \mathrm{PC} = \mathrm{CQ},\quad \mathrm{QA} \neq \mathrm{AR}$$

ゆえに　$6 - Z = X,\ \ 6 - X = Y,\ \ 6 - Y \neq Z$

すなわち　　$Y = Z = 6 - X \quad (X = 1, 2, 4, 5)$

T_1 と T_2 だけが正三角形となる確率は　$\dfrac{4}{6^3}$

T_2 と T_3 だけ，T_3 と T_1 だけが正三角形となる確率もこれと等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{4 \cdot 3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(3) $\dfrac{\triangle\mathrm{BPR}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Z)X}{36},\ \ \dfrac{\triangle\mathrm{CQP}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-X)Y}{36},\ \ \dfrac{\triangle\mathrm{ARQ}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{(6-Y)Z}{36}$ より

$$\begin{aligned}\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} &= \frac{36}{\triangle\mathrm{ABC}}(\triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{BPR} - \triangle\mathrm{CQP} - \triangle\mathrm{ARQ})\\ &= 36 - (6-Z)X - (6-X)Y - (6-Y)Z\\ &= 36 - 6(X+Y+Z) + XY + YZ + ZX\\ &= (6-X)(6-Y) + Z(X+Y-6)\end{aligned}$$

(i) $X + Y - 6 < 0$ のとき，$Z = 6$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = XY \geqq 1 \quad (\text{等号は } X = Y = 1 \text{ のとき})$$

(ii) $X + Y - 6 = 0$ のとき，$X \neq 6$ に注意して

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = (6-X)(6-Y) = (6-X)X = 9 - (X-3)^2 \geqq 5$$

(iii) $X + Y - 6 > 0$ のとき，$Z = 1$ で S は最小となり

$$\frac{36S}{\triangle\mathrm{ABC}} = 5 + (5-X)(5-Y) \geqq 1 \quad (\text{等号は } (X, Y) = (1, 6), (6, 1) \text{ のとき})$$

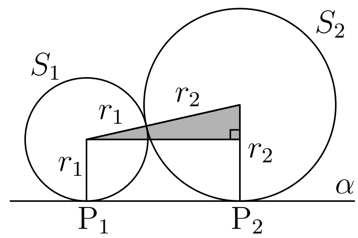
(i)〜(iii) から $\dfrac{36m}{\triangle\mathrm{ABC}}=1$ であるから

$$m=\frac{1}{36}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

これを満たすのは，$(X,Y,Z)=(1,1,6),(1,6,1),(6,1,1)$ の3組.

よって，求める確率は $\dfrac{3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$ ■

3 (1) 右の図の直角三角形について



$$\mathrm{P_1P_2}^2+(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$$
$$\mathrm{P_1P_2}^2=4r_1r_2$$

よって $\boldsymbol{\mathrm{P_1P_2}=2\sqrt{r_1r_2}}$

(2) α 上の半径 r の球 S が，S_1 および S_2 に外接するとき，S と α の接点を P とすると

$$\mathrm{P_1P}=2\sqrt{r_1r},\quad \mathrm{P_2P}=2\sqrt{r_2r}$$

(i) $r_1\neq r_2$ のとき $\mathrm{P_1P}:\mathrm{P_2P}=\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}$

2点 P_1，P_2 を $\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}$ に内分，外分する点を A，B とすると，P は線分 AB を直径とする円周上にある.

(ii) $r_1=r_2$ のとき $\mathrm{P_1P}=\mathrm{P_2P}$

P は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の垂直二等分線上にある. ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) n が素数のとき，$n-1$ 以下の正の整数は n を因数に持たないので

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

は n で割り切れない．

また，$n=4$ のとき，$(n-1)!=6$ は，n で割り切れない．

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$n=pq$，$2 \leqq p \leqq q$ とおくと

$$n-1-q = pq-1-q = (p-1)(q-1)+(p-2) > 0$$

ゆえに　　$2 \leqq p \leqq q < n-1$

(i) $p \neq q$ のとき　　$(n-1)! = (n-1)\cdots q \cdots p \cdots 1$

したがって，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる．

(ii) $p=q$ のとき，$n \neq 4$ であるから，$2<p$，$2p<p^2=n$ より，$2p \leqq n-1$

$(n-1)!$ は p と $2p$ を因数にもつので，$(n-1)!$ は $n=p^2$ で割り切れる．

(i)，(ii) より，n が素数でも 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる．

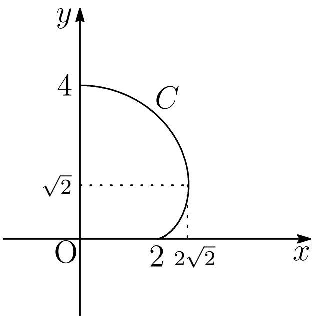
■

5 (1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
(x, y)	(2,0)	$\cdots$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(0, 4)$



C の概形は右の図のようになる.

(2) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t)\,dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\right\} dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt$$
$$= 3\left[\,2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \mathbf{3\pi}$$

別解 本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t) = 3\cos t - \cos 3t, \quad g(t) = 3\sin t - \sin 3t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$f'(t) = -3(\sin t - \sin 3t), \quad g'(t) = 3(\cos t - \cos 3t)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (3\cos t - \cos 3t)\cdot 3(\cos t - \cos 3t) \\ &\qquad - (-3)(\sin t - \sin 3t)(3\sin t - \sin 3t) \\ &= 12(1 - \cos 3t \cos t - \sin 3t \sin t) \\ &= 12(1 - \cos 2t) \end{aligned}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,dt \\ &= 6\Big[\, t - \frac{1}{2}\sin 2t \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{3\pi} \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 $>$OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$