平成 27 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B　平成 27 年 2 月 25 日

$\boxed{\textbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ 四面体 OABC において，OA = OB = OC = BC = 1，AB = AC = x とする．頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H$'$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す．このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ．また，x が変化するときの V の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ $a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx$$

を示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t > 0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t > 0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，$t_2 - t_1 < \pi$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ n を相異なる素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ $(k \geqq 1)$ の積とする．a，b を n の約数とするとき，a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする．

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ．

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ．

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．

$$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$$

が偶数であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は

$$x=\frac{4x-9}{x-2}\quad \text{すなわち}\quad (x-3)^2=0$$

この方程式の解が $x=3$ であるから

$$a_{n+1}-3=\frac{4a_n-9}{a_n-2}-3\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{1}{a_n-3}+1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-3}$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-3}=\frac{1}{a_1-3}+(n-1)=\frac{2n-1}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=\frac{6n-1}{2n-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1}\\ &=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right)\\ &=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}n(n+1)+n+\frac{1}{2k-1}\right\}\\ &=3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

ここで
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}$$

すなわち
$$\frac{n}{2n-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\leqq n\qquad\cdots②$$

② を ① に代入すると，次式から明らか.

$$3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)}\leqq b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}\qquad\cdots(*)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)}\right\}=3,\quad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$

上の 2 式から，$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\mathbf{3}$

解説 p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式　$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$　$\cdots(*)$

$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px+q}{rx+s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s-p)x - q = 0 \quad \cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps-qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots(***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps-qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$$

これから，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数について

$$(s-p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p-s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p+s) \quad \cdots②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps-qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p+s)\}} \end{aligned}$$

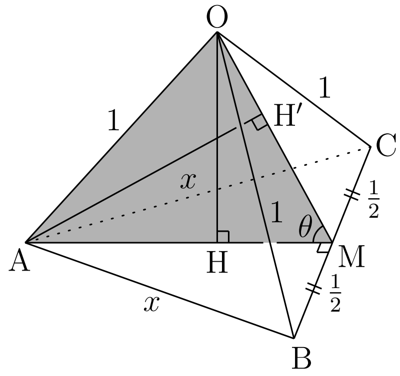
逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \dfrac{1}{a_n - \alpha} + \dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1 - \alpha}$，公差 $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) BCの中点をMとし，$\theta=\angle\mathrm{OMA}$とすると



$$\mathrm{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{MA}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}$$

△OAMに余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{MA}^2-\mathrm{OA}^2}{2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{MA}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-1}{2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{MA}}=\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{MA}}$$

上式より，$\mathrm{OM}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}}$，$\mathrm{MA}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}}\cdots$① であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\mathrm{OM}\cos\theta)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{MA}^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\left(\vec{a}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$
$$=\frac{2x^2-1}{4x^2-1}\vec{a}+\frac{x^2}{4x^2-1}(\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\mathrm{MA}\cos\theta)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{MO}}}{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\frac{x^2-\frac{1}{2}}{2\mathrm{OM}^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{4-2x^2}{3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})$$

よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{s=t=\dfrac{2-x^2}{3}}$

(2) ① より，$\mathrm{MA}\cos\theta=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\mathrm{MA}^2\sin^2\theta=\mathrm{MA}^2-(\mathrm{MA}\cos\theta)^2=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=-\frac{1}{3}x^4+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}(x^2-2)^2$$

$\mathrm{AH'}=\mathrm{MA}\sin\theta$であるから，$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH'}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(x^2-2)^2}}$

よって，$x=\sqrt{2}$のとき，Vは最大値$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{12}}$をとる．

補足 $\triangle\mathrm{OAM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{MA}\sin\theta$より，$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAM}\cdot\mathrm{BC}=\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(x^2-2)^2}$

別解 $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}-\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{a}| = x$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 ABC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$ より

$$(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0, \quad (p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$$

これらを整理すると

$$-x^2p + x^2q + (x^2-1)r = 0, \quad -q+r = 0$$

上の 2 式および $p+q+r=1$ により　$\boldsymbol{p = \dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}}$，$\boldsymbol{q = r = \dfrac{x^2}{4x^2-1}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}'}$ は平面 OBC に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}'}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OH}'}\cdot\vec{c} = 0$ より

$$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b} = 0, \quad (s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{c} = 0$$

これらを整理すると

$$2s+t+x^2-2 = 0, \quad s+2t+x^2-2 = 0$$

よって　　$\boldsymbol{s = t = \dfrac{2-x^2}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}'} = s(\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\mathrm{OH}'^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OH}'}|^2 = s^2(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2) = \frac{(2-x^2)^2}{3}$$

したがって　$\mathrm{AH}' = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}'^2} = \sqrt{1 - \dfrac{(2-x^2)^2}{3}}$

よって　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH}' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin 60^\circ\right)\mathrm{AH}' = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}\sqrt{3-(2-x^2)^2}}$

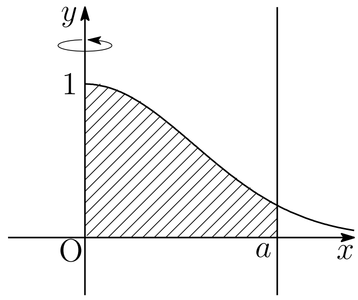
また，V が最大となるのは，A から平面 OBC に下ろした垂線 AH$'$ の長さが最大となる，すなわち，H$'$ が O と一致するときであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}'} = \frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{0} \quad \text{よって} \quad x = \sqrt{2}$$

このとき，$\mathrm{AH}' = \mathrm{AO} = 1$ より，V の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH}' = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\sin 60^\circ\right)\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 求める体積 V は



$$V = 2\pi\int_0^a xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \pi\Big[-e^{-x^2}\Big]_0^a = \boldsymbol{\pi(1-e^{-a^2})}$$

(2) 回転体 A の領域は，y 軸からの距離が r であるとき $(0 \leqq r \leqq a)$

$$0 \leqq y \leqq e^{-r^2}$$

xy 平面に垂直で原点 O を通る座標軸を z 軸とすると　$r^2 = z^2 + x^2$

このとき，平面 $x = t$ による A の断面の表す領域は $(-a \leqq t \leqq a)$

$$x = t,\quad -\sqrt{a^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-t^2},\quad 0 \leqq y \leqq e^{-(z^2+t^2)}$$

したがって，この断面積 $S(t)$ について

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(z^2+t^2)}dz \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(z^2+t^2)}dz$$

よって　$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds$$

(3) (2) の結果から　$$S(t) \leqq e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$$

したがって　$$V = \int_{-a}^{a} S(t)\,dt \leqq \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$$

上式および (1) の結果から

$$\pi(1-e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \quad \text{よって} \quad \sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y) = t^2(\cos t,\ \sin t)$ より $(t > 0)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos t - t^2\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = 2t\sin t + t^2\cos t$$

ゆえに　$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = t(2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$$

$\theta(t)$ は，2 つのベクトル

$$\frac{1}{t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t,\ \sin t),\quad \frac{1}{t}\vec{v} = (2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$$

のなす角であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta(t) &= \frac{\cos t(2\cos t - t\sin t) + \sin t(2\sin t + t\cos t)}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\sqrt{(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+t^2}}\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+t^2}} = 0$　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \frac{\pi}{2}}$

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になる t $(t>0)$ は，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ のときであるから

$$2\cos t - t\sin t = 0 \quad すなわち \quad \tan t - \frac{2}{t} = 0$$

$f(t) = \tan t - \dfrac{2}{t}$ とおくと　$f'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{2}{t^2} > 0$
$\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} f(t) = \infty$ であり，区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ で $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_1) = 0 \quad \left(0 < t_1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす t_1 が唯一存在する．
$\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0} f(t) = -\infty$，$f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$，$\displaystyle\lim_{t\to\frac{3}{2}\pi-0} f(t) = \infty$ であり，区間 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ において $f(t)$ は単調増加であるから，中間値の定理により

$$f(t_2) = 0 \quad \left(\pi < t_2 < \frac{3}{2}\pi\right)$$

を満たす t_2 が唯一存在する．したがって

$$\tan t_1 = \frac{2}{t_1} > \frac{2}{t_2} = \tan t_2 = \tan(t_2 - \pi)$$

$t_1,\ t_2 - \pi \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$t_1 > t_2 - \pi \quad よって \quad t_2 - t_1 < \pi$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a=Ga',\ b=Gb'$ ($a',\ b'$は互いに素) とおくと，$L=Ga'b'$ より

$$f(a,\ b)=\frac{L}{G}=a'b' \quad \cdots(*)$$

$a=Ga'$，$b=Gb'$ は n の約数であるから，a'，b' は n の約数である．
このとき，a'，b' は互いに素であるから，$a'b'$ は n の約数である．
よって，$f(a,\ b)$ は n の約数である．

(2) $f(a,\ b)=b$ のとき，$(*)$ および $b=Gb'$ より

$$a'b'=Gb' \quad \text{ゆえに} \quad a'=G \quad \text{すなわち} \quad a=G^2$$

a は相異なる素数の積であるから，a が 1 以外の平方数になることはない．
よって，$a=1$

(3) x，y が相異なる素数の積であるとき，$S(xy)=S(x)+S(y)$ であるから

$$\begin{aligned}
&S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)\\
=&S(a'b')+S(Ga')+S(Gb')\\
=&\{S(a')+S(b')\}+\{S(G)+S(a')\}+\{S(G)+S(b')\}\\
=&2\{S(G)+S(a')+(b')\}
\end{aligned}$$

よって，$S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)$ は偶数である．