平成26年度　東京工業大学　2次試験前期日程(数学問題)180分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B・C　平成26年2月25日

1 3以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める．

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1), \quad b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1) a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ．

(2) $a_n - b_n$ は4の倍数であることを示せ．

2 $a > 1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*) \qquad \frac{e^t - 1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a = 2$ のとき，すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

3 1個のさいころを投げて，出た目が1か2であれば行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が3か4であれば行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が5か6であれば行列 $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 選ぶ．そして，選んだ行列の表す1次変換によって xy 平面上の点Rを移すという操作を行う．点Rは最初は点 $(0,\ 1)$ にあるものとし，さいころを投げて点Rを移す操作を n 回続けて行ったときに点Rが点 $(0,\ 1)$ にある確率を p_n，点 $(0, -1)$ にある確率を q_n とする．

(1) p_1，p_2 と q_1，q_2 を求めよ．

(2) $p_n + q_n$ と $p_{n-1} + q_{n-1}$ の関係式を求めよ．また，$p_n - q_n$ と $p_{n-1} - q_{n-1}$ の関係式を求めよ．

(3) p_n を n を用いて表せ．

$\boxed{4}$ 点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

$\boxed{5}$ xy 平面上の曲線 $C:y=x^3+x^2+1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k=1,2,3,\cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1) S_1 を求めよ．

(2) x_k を k を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) n は，3 以上の奇数であるから

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),$$
$$b_n = \frac{n^2-1}{8} = \frac{(n-1)(n+1)}{2\cdot 4}$$

連続する 3 整数 $k-1,\ k,\ k+1$ には，少なくとも 2 と 3 の倍数が存在する．また，$n-1$，$n+1$ は連続する偶数で，少なくとも一方は 4 で割り切れる．よって，a_n と b_n はどちらも整数である．

(2) a_n を求めると

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1) = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)\{(k+2)-(k-2)\}\\ &= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}\\ &= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}a_n - b_n &= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1) - \frac{1}{8}(n-1)(n+1)\\ &= \frac{1}{24}(n-1)(n+1)\{n(n-2)-3\}\\ &= \frac{1}{24}(n-3)(n-1)(n+1)^2\end{aligned}$$

n は 3 以上の奇数の整数であるから，$n = 2m+1$ とおくと (m は自然数)

$$a_n - b_n = \frac{1}{24}(2m-2)\cdot 2m(2m+2)^2 = \frac{2}{3}(m-1)m(m+1)^2$$

連続する 3 整数 $m-1,\ m,\ m+1$ には，少なくとも 2 と 3 の倍数が存在する．よって，$a_n - b_n$ は 4 の倍数である．

別解 $a_n = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$，$b_n = \dfrac{n^2-1}{8}$ より (n は3以上の奇数)

$$\begin{aligned} a_3 - b_3 &= 1 - 1 = 0, \\ a_{n+2} - a_n &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ b_{n+2} - b_n &= \frac{(n+2)^2-1}{8} - \frac{n^2-1}{8} \\ &= \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (a_{n+2} - a_n) - (b_{n+2} - b_n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}(n+1) \\ (a_{n+2} - b_{n+2}) - (a_n - b_n) &= \frac{1}{6}(n+1)(n-1)(2n+3) \end{aligned}$$

n は3以上の奇数であるから，$n = 2m+1$ とおくと (m は自然数)

$$\begin{aligned} (a_{2m+3} - b_{2m+3}) - (a_{2m+1} - b_{2m+1}) &= \frac{2}{3}m(m+1)(4m+5) \\ &= \frac{2}{3}m(m+1)\{(m+2) + 3(m+1)\} \\ &= \frac{2}{3}m(m+1)(m+2) + 2m(m+1)^2 \end{aligned}$$

連続する 3 つの自然数には，少なくとも 2 と 3 の倍数が存在するから，$m(m+1)(m+2)$ は6の倍数．連続する 2 つの自然数には，少なくとも 2 の倍数が存在するから，$m(m+1)$ は2の倍数．上式から

$$(a_{2m+3} - b_{2m+3}) - (a_{2m+1} - b_{2m+1})$$

は4の倍数で，$a_3 - b_3 = 0$ であるから，すべての自然数 m について

$$a_{2m+1} - b_{2m+1}$$

は4の倍数である． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(t)=e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t$ とおくと　$f(0)=0$

$$f'(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}-1=\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}(e^{\frac{t}{2}}-1)^2 \geqq 0$$

したがって，$t>0$ のとき $f(t)\geqq 0$．このとき

$$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{2}}$$

(2) $a \geqq 2$ のとき，$t>0$ に対して，$e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ であるから，(1) の結果により

$$\frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

$1<a<2$ とし，$g(t)=e^{(1-\frac{1}{a})t}-e^{-\frac{t}{a}}-t$ とおくと　$g(0)=0$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(1-\frac{1}{a}\right)e^{(1-\frac{1}{a})t}+\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}-1, \\ g''(t) &= \left(1-\frac{1}{a}\right)^2 e^{(1-\frac{1}{a})t}-\frac{1}{a^2}e^{-\frac{t}{a}} \\ &= \left(1-\frac{1}{a}\right)^2 e^{-\frac{t}{a}}\left\{e^t-\frac{1}{(a-1)^2}\right\} \end{aligned}$$

ゆえに　$g'(0)=0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} g'(t)=\infty$

$t_0=-2\log(a-1)$ とおくと　$t_0>0$，$g''(t_0)=0$

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$g''(t)$		$-$	0	$+$
$g'(t)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

上の増減表により，$g'(t_0)<0$ であるから

$$g'(t_1)=0, \quad t_0<t_1$$

をみたす t_1 が唯一存在する．したがって

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき，$g(t_1)<0$ となり，$t=t_1$ に対して，不等式 $(*)$ は成立しない．

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a \geqq 2}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{f}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと

$$A\vec{e}=-\vec{f},\quad B\vec{e}=\vec{f},\quad C\vec{e}=-\vec{e},$$
$$A\vec{f}=-\vec{e},\quad B\vec{f}=-\vec{e},\quad C\vec{f}=\vec{f}$$

p_1 は 1 回目に C を選ぶ確率であるから　$p_1=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

1 回目に A，B，C のいずれを選んでも点 $(0,-1)$ にないから　$\boldsymbol{q_1=0}$

操作を 2 回続けて行ったとき点 R が点 $(0,\ 1)$ に移るのは，行列の積が

$$AA,\quad AB,\quad CC$$

となる場合であるから

$$p_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

操作を 2 回続けて行ったとき点 R が点 $(0,-1)$ に移るのは，行列の積が

$$BA,\quad BB$$

となる場合であるから　$q_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$

(2) R を移す操作を n 回続けて行って，点 R が点 $(1,\ 0)$ にある確率を r_n，点 $(-1,\ 0)$ にある確率を s_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_n=\frac{1}{3}(p_{n-1}+r_{n-1}+s_{n-1}),\quad r_n=\frac{1}{3}(2q_{n-1}+s_{n-1}),$$
$$q_n=\frac{1}{3}(q_{n-1}+r_{n-1}+s_{n-1}),\quad s_n=\frac{1}{3}(2p_{n-1}+r_{n-1})$$

$p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1}+s_{n-1}=1$ であるから

$$\boldsymbol{p_n+q_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(p_{n-1}+q_{n-1}),\quad p_n-q_n=\frac{1}{3}(p_{n-1}-q_{n-1})}$$

(3) (2) の結果から　$p_n+q_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$

ゆえに　$p_n+q_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$，　$p_n-q_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

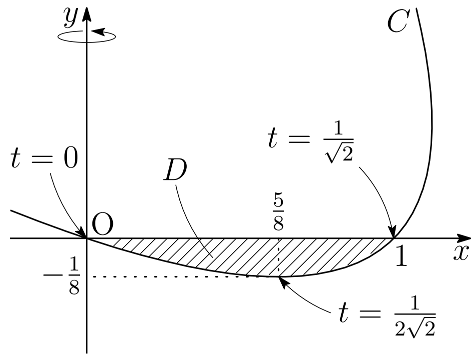
よって　$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ■

4 (1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は点 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2}t^2-2t)$ を原点を中心に 45° 回転した点であるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}t^2+3t \\ \sqrt{2}t^2-t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{Q}\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t,\ t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}$

(2) (1) の結果から



$$\begin{aligned} y &= t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= \left(t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$y \geqq -\dfrac{1}{8}$ であるから，直線 $y=a$ と曲線 C が共有点を持つとき

$$\boldsymbol{a \geqq -\frac{1}{8}}$$

(3) D は，上の図の斜線部分である． $\dfrac{dx}{dt} = -2t + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

t	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
x	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 x|y|\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x|y|\frac{dx}{dt}\cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\left(-t^2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(-2t+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-2t^5+\frac{11}{\sqrt{2}}t^4-9t^3+\frac{9}{2\sqrt{2}}t^2\right)dt \\ &= \left[-\frac{t^6}{3}+\frac{11}{5\sqrt{2}}t^5-\frac{9}{4}t^4+\frac{3}{2\sqrt{2}}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{11}{240}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{V = \frac{11}{120}\pi}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = x^3 + x^2 + 1$ を微分すると　$y' = 3x^2 + 2x$

C 上の点 $(t,\ t^3 + t^2 + 1)$ における接線を l とすると，l の方程式は

$$y - (t^3 + t^2 + 1) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

すなわち　$y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 + 1$

C と l の方程式から

$$x^3 + x^2 + 1 - \{(3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 + 1\} = (x - t)^2(x + 2t + 1)$$

$x_{k-1} = t$ のとき，$x_k + 2t + 1 = 0$　ゆえに　$x_k = -2x_{k-1} - 1$

$x_0 = 1$ であるから

$$x_k + \frac{1}{3} = -2\left(x_{k-1} + \frac{1}{3}\right) \quad \text{よって} \quad x_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{k+2} \quad \cdots (*)$$

したがって　$x_k - x_{k-1} = \dfrac{-1 + (-2)^{k+2}}{3} - \dfrac{-1 + (-2)^{k+1}}{3} = (-2)^{k+1}$

ゆえに　$S_k = \dfrac{1}{12}|x_k - x_{k-1}|^4 = \dfrac{16^{k+1}}{12} \quad \cdots (**)$

よって　$S_1 = \dfrac{16^2}{12} = \mathbf{\dfrac{64}{3}}$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{x_k = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}(-2)^{k+2}}$

(3) $(**)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{16^{k+1}} = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \mathbf{\frac{1}{20}}$

補足　公式[1]

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n \, dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

に $m = 2$，$n = 1$，$\alpha = x_{k-1}$，$\beta = x_k$ を代入すると

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2 (x_k - x) \, dx = \frac{1}{12}(x_k - x_{k-1})^4$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.