平成 25 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B・C　平成 25 年 2 月 25 日

1 (1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ．

(2) 6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ．

2 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A)=ad-bc$，$t(A)=a+d$ と定める．

(1) 2 次の正方行列 A，B に対して，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ．

(2) A の成分がすべて実数で，$A^5=E$ が成り立つとき，$x=\Delta(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ．ただし，E は 2 次の単位行列とする．

3 k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ．

4 正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

5 a，b を正の実数とし，円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える．

(1) C_1 が C_2 に内接するための a，b の条件を求めよ．

(2) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする．このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) α，β は 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ について，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$$

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ より

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=3(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-5(\alpha^n+\beta^n) \quad \cdots(*)$$

$\alpha+\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ は整数であるから，$(*)$ より，すべての自然数 n について，$\alpha^n+\beta^n$ は整数である．したがって

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\equiv 3(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) \pmod 5$$

ゆえに　$\alpha^n+\beta^n\equiv 3^{n-1}(\alpha+\beta)=3^n \pmod 5$

よって　$\alpha^n+\beta^n-3^n\equiv 0 \pmod 5$

したがって，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の倍数である．

補足 α，β は 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の解であるから

$$\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1}+5\alpha^n=0, \quad \beta^{n+2}-3\alpha^{n+1}+5\alpha^n=0$$

上の 2 式の辺々を加えることにより，$(*)$ を得る．

(2) k を自然数とする．k 個の数字 $A_1, A_2, \cdots A_k$ から重複を許して 1 列に 6 個並べるとき，k 種類の数字がそろう場合の総数を Q_k とすると [1]

$$\begin{aligned}
Q_1&=1\\
Q_2&=2^6-{}_2\mathrm{C}_1\cdot Q_1\\
Q_3&=3^6-{}_3\mathrm{C}_1\cdot Q_1-{}_3\mathrm{C}_2\cdot Q_2\\
Q_4&=4^6-{}_4\mathrm{C}_1\cdot Q_1-{}_4\mathrm{C}_2\cdot Q_2-{}_4\mathrm{C}_3\cdot Q_3
\end{aligned}$$

上の諸式から　$Q_2=62,\ Q_3=540,\ Q_4=1560$

求める確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4\cdot Q_4}{6^6}=\dfrac{15\times 1560}{6^6}=\mathbf{\dfrac{325}{648}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

したがって
$$\begin{aligned}\Delta(AB)&=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\&=adps+bcqr-(adqr+bcps)\\&=(ad-bc)(ps-qr)\\&=\Delta(A)\Delta(B)\end{aligned}$$

(2) $A^5=E$ より　$\Delta(A^5)=\Delta(E)$

(1) の結果から　$\{\Delta(A)\}^5=1$　ゆえに　$\Delta(A)=1$

$x=\Delta(A)=1\neq 0$，$y=t(A)$ であるからハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2-yA+E=O \quad \text{ゆえに} \quad A^2=yA-E,\quad A^{-1}=-A+yE$$

ここで
$$\begin{aligned}A^4&=(A^2)^2=(yA-E)^2\\&=y^2A^2-2yA+E\\&=y^2(yA-E)-2yA+E\\&=(y^3-2y)A+(1-y^2)E\end{aligned}$$

$A^5=E$ より，$A^4=A^{-1}$ であるから

$$(y^3-2y)A+(1-y^2)E=-A+yE$$

したがって　$(y^2+y-1)\{(y-1)A-E\}=O$

(i) $y^2+y-1=0$ のとき　$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $(y-1)A-E=O$ のとき，$y\neq 1$ に注意して　$A=\dfrac{1}{y-1}E$

$A^5=E$ であるから　$\dfrac{1}{(y-1)^5}E=E$

ゆえに　$(y-1)^5=1$　これを解いて　$y=2$

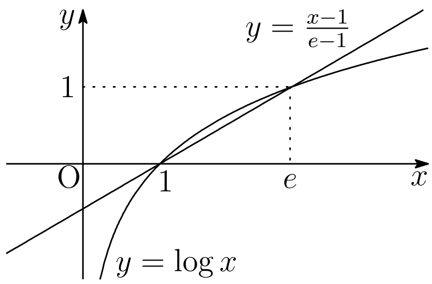
よって　$\boldsymbol{x=1,\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ 2}$　■

3 $f(x) = e^x - x^e$ とすると

$$f'(x) = e^x - ex^{e-1} = e(e^{x-1} - x^{e-1}) = ex^{e-1}\left(\frac{e^{x-1}}{x^{e-1}} - 1\right)$$

$g(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x^{e-1}}$ とおくと $(x > 0)$

$$g(1) = g(e) = 1,$$
$$\log g(x) = x - 1 - (e-1)\log x$$
$$= (e-1)\left(\frac{x-1}{e-1} - \log x\right)$$



$y = \dfrac{x-1}{e-1}$ および $y = \log x$ のグラフから

$0 < x < 1,\ e < x$ のとき　$\log g(x) > 0$　すなわち　$g(x) > 1$
$1 < x < e$ のとき　$\log g(x) < 0$　すなわち　$0 < g(x) < 1$

$f'(x) = ex^{e-1}\{g(x) - 1\}$ より，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(1)	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x > 3$ のとき，$\dfrac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{e-1} > \log e^{\frac{x}{3}}$ より　$e^{\frac{x}{3}} > \dfrac{e-1}{3}x + 1 > \dfrac{e-1}{3}x$

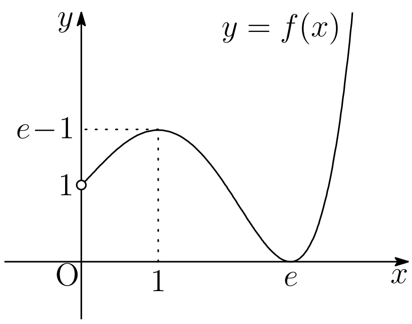
ゆえに　$e^x > \left(\dfrac{e-1}{3}\right)^3 x^3$　すなわち　$0 < \dfrac{x^e}{e^x} < \left(\dfrac{3}{e-1}\right)^3 x^{e-3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{e-1}\right)^3 x^{e-3} = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x} = 0$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 - \frac{x^e}{e^x}\right) = \infty$

求める正の解の個数は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の個数であるから

$\boldsymbol{k < 0}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{k = 0}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{0 < k \leqq 1}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{1 < k < e-1}$ **のとき**	**3 個**
$\boldsymbol{k = e-1}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{e-1 < k}$ **のとき**	**1 個**



■

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\sin 4nx \geqq \sin x \cdots (*)$ より

$$\sin 4nx - \sin x = 2\cos\frac{(4n+1)x}{2}\sin\frac{(4n-1)x}{2} \geqq 0$$

$f(x) = \cos\dfrac{(4n+1)x}{2}$，$g(x) = \sin\dfrac{(4n-1)x}{2}$ とおくと，整数 k を用いて

$$\frac{2k-3}{4n+1}\pi \leqq x \leqq \frac{2k-1}{4n+1}\pi \text{ のとき} \quad f(x) = (-1)^{k-1}|f(x)|$$

$$\frac{2k-2}{4n-1}\pi \leqq x \leqq \frac{2k}{4n-1}\pi \text{ のとき} \quad g(x) = (-1)^{k-1}|g(x)|$$

$1 \leqq k \leqq n$ のとき $\qquad \dfrac{2k-1}{4n+1} - \dfrac{2k-2}{4n-1} = \dfrac{4(n-k)+3}{(4n+1)(4n-1)} > 0$

このとき $\qquad \dfrac{2k-3}{4n+1} < \dfrac{2k-2}{4n-1} < \dfrac{2k-1}{4n+1} < \dfrac{2k}{4n-1}$

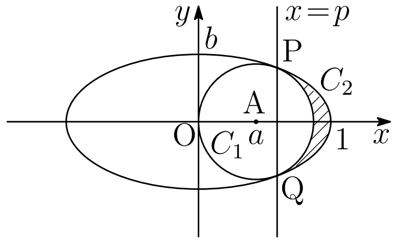
$(*)$ のとき，$f(x)g(x) \geqq 0$ より，$\dfrac{2k-2}{4n-1}\pi \leqq x \leqq \dfrac{2k-1}{4n+1}\pi$ であるから，範囲 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{\pi} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{4n+1} - \frac{2k-2}{4n-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{4n-4k+3}{(4n+1)(4n-1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{4(n+1-k)-1}{(4n+1)(4n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{4k-1}{(4n+1)(4n-1)} \\
&= \frac{2n(n+1)-n}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}
\end{aligned}$$

したがって $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{16-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{8}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{8}}$ ■

5 (1) $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$，$C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(i) C_1 と C_2 の接点が $(1,\ 0)$ でないとき，すなわち，$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，C_1 と C_2 から y を消去すると



$$(1-b^2)x^2-2ax+b^2=0 \quad \cdots (*)$$

このとき，$b\neq 1$ である．実際，$b=1$ とすると，C_2 は原点を中心とする半径 1 の円で，C_1 と共有点をもたない．方程式 $(*)$ の係数について

$$(-a)^2-(1-b^2)b^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+\left(b^2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$(*)$ の重解を p とすると，解と係数の関係により　$p^2=\dfrac{b^2}{1-b^2}$　$\cdots$①

$0<p<1$ より　$0<\dfrac{b^2}{1-b^2}<1$　すなわち　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$b=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a^2}}$

(ii) C_1 と C_2 の接点が $(1,\ 0)$ であるとき，すなわち，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C_1 の中心を $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ とし，C_2 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ b\sin\theta)$ について，$\mathrm{AP}\geqq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+(b\sin\theta)^2\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\cos^2\theta-\cos\theta+b^2(1-\cos^2\theta)\geqq 0$$

$\theta=0$ が接点であり，$\theta\to 0$ の極限で次式の右辺は極大となるから

$$b^2\geqq 1-\frac{1}{1+\cos\theta} \quad \text{ゆえに} \quad b\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i),(ii) から　**$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$b=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a^2}}$**

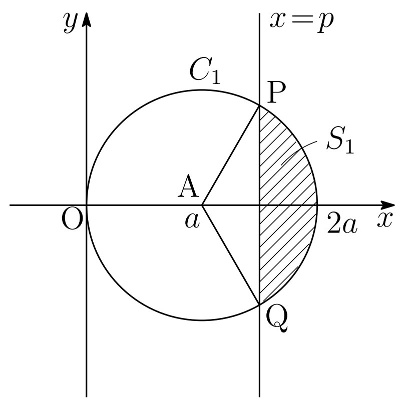
$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$b\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$C_2 : x^2+3y^2=1$　ゆえに　$p^2+3q^2=1$

① より，$p^2=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$q^2=\dfrac{1}{6}$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)}$

(3) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を (1) の結果に代入して

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}}$$



$0<a<\dfrac{1}{2}$ に注意すると　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

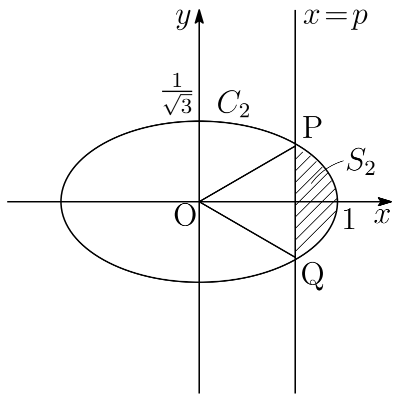
$x=p$ は，2 点 $(a,\ 0)$，$(2a,\ 0)$ を結ぶ線分の垂直二等分線であるから，$\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(p,-q)$ とおくと，$\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{2}{3}\pi$ となる．

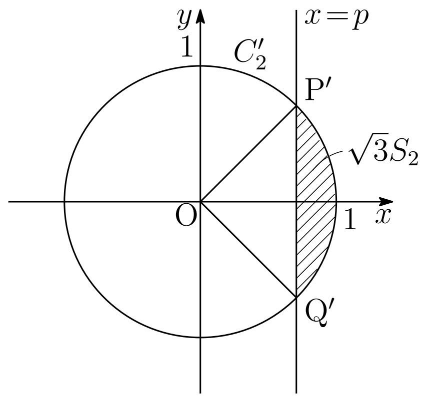
したがって，右の図の斜線部分 S_1 の面積は

$$S_1=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{27}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

下の図の $C_2 : x^2+3y^2=1$ と $x=p$ で囲まれた斜線部分の面積を S_2 とする．C_2 を x 軸を元に y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍拡大した図形を $C_2' : x^2+y^2=1$ とすると，直線 $x=p$ と C_2' との交点は $(p,\ p)$，$(p,-p)$ であり，これらをそれぞれ P'，Q' とおくと，$\angle\mathrm{P'OQ'}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sqrt{3}S_2=\frac{1}{2}\cdot1^2\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad S_2=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}$$





求める面積を S とすると，S は (1) の図の斜線部分であるから

$$S=S_2-S_1=\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{2}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

解説

一般に，曲線 $C:(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ の曲率半径 r (曲率 κ の逆数) は[2]

$$r=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}$$

C の単位接ベクトル $\xi_1=\left(\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルを $\xi_2=\left(-\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$ とすると，曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$\begin{aligned}(c_1,\ c_2)&=(x,\ y)+r\xi_2\\&=(x,\ y)+\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}(-y',\ x')\end{aligned}$$

$C_2:(x,\ y)=(\cos\theta,\ b\sin\theta)$ の曲率半径 r および曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$\begin{aligned}r&=\frac{(\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{b},\\(c_1,\ c_2)&=(\cos\theta,\ b\sin\theta)+\frac{\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{b}(-b\cos\theta,-\sin\theta)\end{aligned}$$

C_2 の点 $(1,\ 0)$，すなわち，$\theta=0$ における曲率半径および曲率中心は

$$r=b^2,\quad (c_1,\ c_2)=(1-b^2,\ 0)$$

このとき，C_1 の半径は $\dfrac{1}{2}$ であるから，これが C_2 の接触円であるとき

$$b^2=\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

C_1 と C_2 の接触[3]について，次のようになる．

(i) $0<a<\dfrac{1}{2}$，$b=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a^2}}$ のとき，1 次接触をなす．

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$，$b>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，1 次の接触をなす．

(iii) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，2 次の接触をなす．このとき，C_1 は C_2 の頂点 $(1,\ 0)$ における接触円 (曲率円) である．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ を参照．
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2017.pdf (p.10 を参照)

補足

放物線 $y^2=4px$，すなわち，曲線 $P:(x,\ y)=\left(\dfrac{t^2}{4p},\ t\right)$ について

$$x'=\frac{t}{2p},\ \ x''=\frac{1}{2p},\ \ y'=1,\ \ y''=0$$

ゆえに　　$x'^2+y'^2=\dfrac{t^2}{4p^2}+1,\quad x'y''-x''y'=-\dfrac{1}{2p}$

したがって，P の曲率中心は

$$(c_1,\ c_2)=\left(\frac{t^2}{4p},\ t\right)+\left(\frac{t^2}{4p^2}+1\right)(2p,-t)$$

特に，P の頂点 $(0,\ 0)$ における曲率中心は $(2p,\ 0)$ であり，この曲率中心と放物線 P の焦点 $(p,\ 0)$，頂点 $(0,\ 0)$，準線 $x=-p$ が等間隔にある．

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，すなわち $E:(x,\ y)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ について

$$x'=-a\sin\theta,\ x''=-a\cos\theta,\ y'=b\cos\theta,\ y''=-b\sin\theta$$

ゆえに　　$x'^2+y'^2=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta,\ x'y''-x''y'=ab$

したがって，E の曲率中心は

$$(c_1,\ c_2)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{ab}(-b\cos\theta,-a\sin\theta)$$

特に，E の頂点 $(\pm a,\ 0)$ における曲率中心は $\left(\pm\dfrac{a^2-b^2}{a},\ 0\right)$ である．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$，すなわち $H:(x,\ y)=\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right)$ について

$$x'=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta},\ x''=\frac{a(2-\cos^2\theta)}{\cos^3\theta},\ y'=\frac{b}{\cos^2\theta},\ y''=\frac{2b\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

ゆえに　　$x'^2+y'^2=\dfrac{a^2\sin^2\theta+b^2}{\cos^4\theta},\ x'y''-x''y'=-\dfrac{ab}{\cos^3\theta}$

したがって，H の曲率中心は

$$(c_1,\ c_2)=\left(\frac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right)-\frac{a^2\sin^2\theta+b^2}{ab\cos\theta}\left(-\frac{b}{\cos^2\theta},\ \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

特に，H の頂点 $(\pm a,\ 0)$ における曲率中心は $\left(\pm\dfrac{a^2+b^2}{a},\ 0\right)$ である．

楕円 E と双曲線 H は，それらの離心率 e を用いると [4]，曲率中心は $(\pm ae^2,\ 0)$ となる．曲率中心 $(\pm ae^2,\ 0)$，焦点 $(\pm ae,\ 0)$，頂点 $(\pm a,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$ の x 座標は等比数列をなす (複号同順)．■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf $\boxed{3}$ を参照．