平成24年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B・C　平成24年2月25日

1 (1) 辺の長さが1である正四面体OABCにおいて辺ABの中点をD，辺OCの中点をEとする．2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$との内積を求めよ．

(2) 1から6までの目がそれぞれ$\dfrac{1}{6}$の確率で出るさいころを同時に3個投げるとき，目の積が10の倍数になる確率を求めよ．

2 (1) $\log_{10} 3 = 0.4771$として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$の桁数を求めよ．

(2) 実数aに対して，aを超えない最大の整数を$[\,a\,]$で表す．10000以下の正の整数nで$[\sqrt{n}\,]$がnの約数となるものは何個あるか．

3 3次関数$y = x^3 - 3x^2 + 2x$のグラフをC，直線$y = ax$をlとする．

(1) Cとlが原点以外の共有点をもつような実数aの範囲を求めよ．

(2) aが(1)で求めた範囲内にあるとき，Cとlによって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする．$S(a)$が最小となるaの値を求めよ．

4 nを正の整数とする．数列$\{a_k\}$を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．

(1) a_2およびa_3を求めよ．

(2) 一般項a_kを求めよ．

(3) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$を示せ．

5 行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で定まる1次変換を$f$とする．原点O(0, 0)と異なる任意の2点P，Qに対して$\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OQ}'}{\mathrm{OQ}}$が成り立つ．ただし，P′，Q′はそれぞれP，Qの$f$による像を表す．

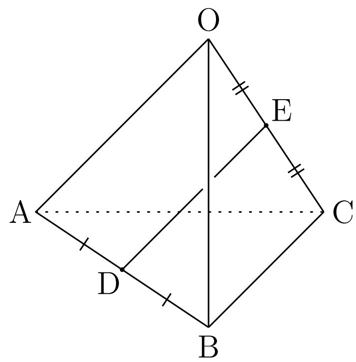
(1) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$を示せ．

(2) 1次変換fにより，点$(1,\ \sqrt{3})$が点$(-4,\ 0)$に移るとき，Aを求めよ．

6 xyz空間に4点P(0, 0, 2)，A(0, 2, 0)，B($\sqrt{3}$, -1, 0)，C($-\sqrt{3}$, -1, 0)をとる．四面体PABCの$x^2 + y^2 \geqq 1$を満たす部分の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{c}-\vec{a}$$

このとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{2}(|\vec{c}-\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) ○を偶数，△を 1 または 3 とすると，目の積が 10 の倍数となる組合せは

$$\{5,\ 5,\ \bigcirc\},\quad \{5,\ \bigcirc,\ \bigcirc\},\quad \{5,\ \bigcirc,\ \triangle\}$$

したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}\times 3+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\times 3+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\times 3!=\frac{9+27+36}{6^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

別解　偶数が出ない事象を A，5 が出ない事象を B とすると，求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{2}{6}\right)^2$$
$$=\frac{216-27-125+8}{216}=\frac{1}{3}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $N=3^{100}$ とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n=\frac{1(3^{100}-1)}{3-1}=\frac{3^{100}-1}{2}=\frac{N-1}{2}$

このとき $\quad N-\dfrac{N-1}{2}=\dfrac{N+1}{2}>0,\quad \dfrac{N-1}{2}-\dfrac{N}{3}=\dfrac{N-3}{6}>0$

ゆえに $$\frac{N}{3}<\frac{N-1}{2}<N \quad\cdots(*)$$

ここで $\quad \log_{10}N=\log_{10}3^{100}=100\log_{10}3=47.71<48,$

$$\log_{10}\frac{N}{3}=\log_{10}N-\log_{10}3=47.71-0.4771>47$$

$(*)$ の辺々の常用対数をとると，上の結果により

$$47<\log_{10}\frac{N}{3}<\log_{10}\frac{N-1}{2}<\log_{10}N<48$$

したがって $\quad 10^{47}<\dfrac{N-1}{2}<10^{48}$

よって，求める桁数は **48** (桁)

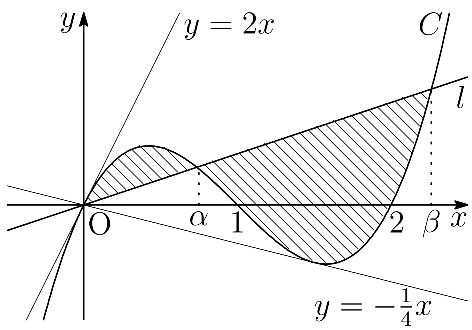
(2) k を 99 以下の自然数とし，$k^2\leqq n<(k+1)^2$ のとき $[\sqrt{n}\,]=k$
このとき，条件を満たす n は，$n=k^2$，$k(k+1)$，$k(k+2)$ の 3 個ある．
$n=100^2$ のとき，$[\sqrt{n}\,]$ は n の約数である．
よって，求める個数は $3\times 99+1=\mathbf{298}$ (個) ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=x^3-3x^2+2x$ と $y=ax$ から y を消去すると

$$x(x^2-3x+2-a)=0$$

C と l が原点以外の共有点をもつから，2 次方程式

$$x^2-3x+2-a=0\quad\cdots(*)$$



が実数解をもつ．したがって，係数について

$$(-3)^2-4\cdot1(2-a)\geqq0 \quad これを解いて\quad \boldsymbol{a\geqq-\frac{1}{4}}$$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+2x$ とすると　$f'(x)=3x^2-6x+2$

したがって，C の原点における接線の傾きは　$f'(0)=2$

$-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 2$ のとき，2 次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(0\leqq\alpha\leqq\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2-a \quad \cdots(**)$$

$f(x)-ax=x(x^2-3x+2-a)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned}
S(a)&=\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx-\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=\int_0^\alpha x(\alpha-x)(\beta-x)\,dx+\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)+\alpha\}(x-\alpha)(\beta-x)\,dx\\
&=\beta\int_0^\alpha x(\alpha-x)\,dx-\int_0^\alpha x^2(\alpha-x)\,dx\\
&\qquad\qquad+\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)\,dx\\
&=\beta\cdot\frac{1}{6}\alpha^3-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{12}\alpha^3(2\beta-\alpha)+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

$(*)$ より，$\beta=3-\alpha$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}
S(a)&=\frac{1}{12}\alpha^3\{2(3-\alpha)-\alpha\}+\frac{1}{12}\{(3-\alpha)-\alpha\}^3\cdot 3\\
&=\frac{1}{4}\left\{\alpha^3(2-\alpha)+(3-2\alpha)^3\right\}
\end{aligned}$$

$g(\alpha)=S(a)$ とおく．このとき，$(**)$ の第 1 式に注意して　$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{3}{2}$

$g(\alpha)=\dfrac{1}{4}\{2\alpha^3-\alpha^4+(3-2\alpha)^3\}$ より

$$\begin{aligned}
g'(\alpha)&=\frac{1}{4}\left\{6\alpha^2-4\alpha^3-6(3-2\alpha)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\alpha^2(3-2\alpha)-3(3-2\alpha)^2\right\}\\
&=\frac{1}{2}(3-2\alpha)(\alpha^2+6\alpha-9)=\frac{1}{2}(3-2\alpha)(\alpha+3+3\sqrt{2})(\alpha+3-3\sqrt{2})
\end{aligned}$$

α	0	$\cdots$	$3\sqrt{2}-3$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		↘	極小	↗	

よって，$(**)$ より　$a=2-\alpha\beta=2-\alpha(3-\alpha)$

$\qquad=2-(3\sqrt{2}-3)\{3-(3\sqrt{2}-3)\}=\mathbf{38-27\sqrt{2}}$

解説

$C: y = ax^3 - 2akx^2 + cx\ (a > 0)$ と $l: y = mx$ から，y を消去すると

$$x(ax^2 - 2akx + c - m) = 0$$

C と l の共有点の x 座標が $0,\ \alpha,\ \beta$ であるとき $(0 \leqq \alpha \leqq \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = \frac{c-m}{a} \quad \text{また} \quad 0 < \alpha \leqq k \leqq \beta$$

このとき，l の傾きに関係なく，$\alpha + \beta$ の値は一定である．

C と l で囲まれた部分の面積を S とすると [1]，前ページの計算と同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{S}{a} &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= \frac{1}{12}\alpha^3(2\beta - \alpha) + \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3(\alpha + \beta) \\
&= \frac{1}{12}\alpha^3\{2(2k - \alpha) - \alpha\} + \frac{1}{12}\{(2k - \alpha) - \alpha\}^3 \cdot 2k \\
&= \frac{1}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k - \alpha)^3\}
\end{aligned}$$

$f(\alpha) = S$ とおくと，$f(\alpha) = \dfrac{a}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k-\alpha)^3\}$ より

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \frac{a}{12}\{-12\alpha^3 + 12k\alpha^2 - 48k(k-\alpha)^2\} \\
&= \frac{a}{12}\{12\alpha^2(k - \alpha) - 48k(k-\alpha)^2\} \\
&= a(k - \alpha)(\alpha^2 + 4k\alpha - 4k^2) \\
&= a(k - \alpha)(\alpha + 2k + 2\sqrt{2}k)(\alpha + 2k - 2\sqrt{2}k)
\end{aligned}$$

α	0	$\cdots$	$2(\sqrt{2}-1)k$	$\cdots$	k
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

S が最大となるとき　$\alpha = 2(\sqrt{2}-1)k,\ \beta = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)k$　ゆえに　$\alpha : \beta = 1 : \sqrt{2}$

この結果を (∗∗) に適用すると，a は簡単に求めることができる．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{4}$ (1) $a_1=\dfrac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad (k=1,2,3,\cdots)$

$k=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}a_2&=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}a_1=-\frac{1}{n+2}+n\cdot\frac{1}{n(n+1)}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}\end{aligned}$$

$k=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}a_3&=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}(a_1+a_2)\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，k 以下のすべての自然数について

$$a_k=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\qquad\cdots(*)$$

が成立すると仮定すると，漸化式により

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=-\frac{1}{n+k+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\\&=-\frac{1}{n+k+1}+\frac{n}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}\end{aligned}$$

したがって，k を $k+1$ と置き換えたときも $(*)$ が成立する．
よって，すべての自然数 k について $(*)$ は成立するから，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_k=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}}$$

(3) (2) の結果から $\quad a_k = \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$

$\dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)} < \dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ であるから

$$\frac{1}{n+k} < \sqrt{a_k} < \frac{1}{n+k-1}$$

$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ より $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < b_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1}$

ゆえに $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} \qquad \cdots(**)$

ここで $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^1 = \log 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^1 = \log 2$$

$(**)$ にはさみうちの原理を適用すると $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$

別解 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{n+x}$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \Big[\ \log(n+x)\ \Big]_1^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n+1}{n+1} = \log 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-2}^{k-1} \frac{dx}{n+x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{n-1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \Big[\ \log(n+x)\ \Big]_{-1}^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n-1}{n-1} = \log 2$$

上の 2 式と $(**)$ から，はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) f による原点と異なる 3 点 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (x,\ y)$ の像が，それぞれ

$$(a,\ c),\ (b,\ d),\ (ax+by,\ cx+dy)$$

であるから，条件を満たすとき

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{1}=\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{1}=\frac{\sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

辺々を平方すると

$$a^2+c^2=b^2+d^2=\frac{(a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2+2(ac+bd)xy}{x^2+y^2}$$

したがって　　$a^2+c^2=b^2+d^2,\quad ac+bd=0\qquad\cdots(*)$

よって，$a^2+c^2=b^2+d^2$ が成り立つ．

(2) f により点 $(1,\ \sqrt{3})$ が点 $(-4,\ 0)$ に移るから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases} a+b\sqrt{3}=-4 \\ c+d\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$(*)$，$(**)$ より　$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

ゆえに　$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$　$(**)$ の第 1 式より　$a=-1,\ b=-\sqrt{3}$

これと $c=-d\sqrt{3}$ を (1) の結果に代入して

$$(-1)^2+(-d\sqrt{3})^2=(-\sqrt{3})^2+d^2\quad \text{これを解いて}\quad d=\pm 1$$

したがって　$c=\mp\sqrt{3},\ d=\pm 1$ (複号同順)

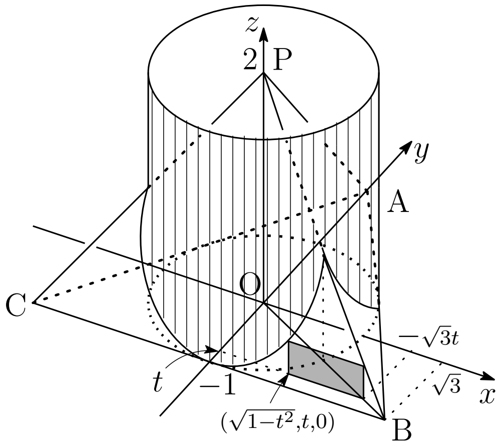
よって　　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-\sqrt{3}} \\ \mathbf{\mp\sqrt{3}} & \mathbf{\pm 1} \end{pmatrix}$　**(複号同順)**　■

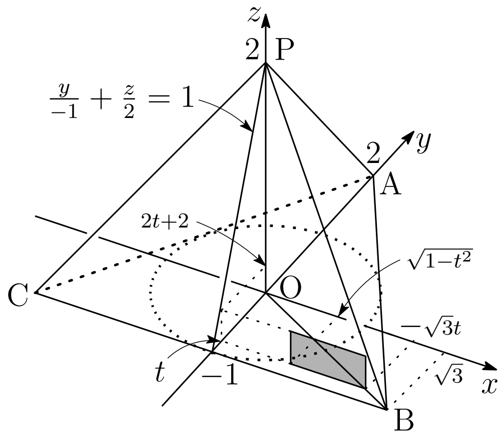
6 $x \geqq 0$，$y \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$，$-1 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}$，$0 \leqq z \leqq 2y+2$，$x^2+y^2 \geqq 1$ の表す領域を平面 $y=t$ で切った切り口は $\left(-1 \leqq t \leqq -\dfrac{1}{2}\right)$

$$(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0),\ (-\sqrt{3}t,\ t,\ 0),\ (\sqrt{1-t^2},\ t,\ 2t+2),\ (-\sqrt{3}t,\ t,\ 2t+2)$$

を頂点とする長方形であるから，その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2}\,)(2t+2)$$





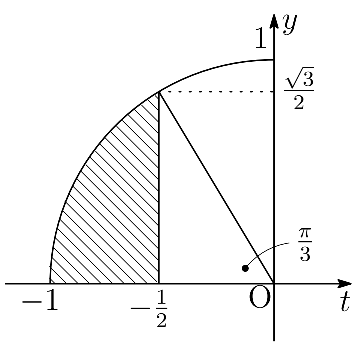
求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{6} &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} S(t)\,dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2}\,)(2t+2)\,dt \\
&= \left[-\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}t^3 + t^2\right) + \frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - 2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt \\
&= \frac{5\sqrt{3}}{12} - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

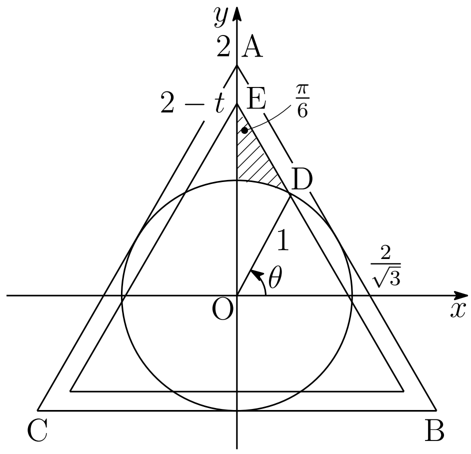
よって　　$V = \boldsymbol{4\sqrt{3} - 2\pi}$

補足 $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt$ は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$



別解 $x \geqq 0$，$y \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x^2+y^2 \geqq 1$ および平面 ABP$(\sqrt{3}x+y+z=2)$ で囲まれた領域を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った切り口は右の図の斜線部分で，その面積を S とする．右の図の OD と x 軸の正の向きとなす角を θ とし，△ODE に正弦定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\angle\mathrm{ODE}} = \frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$\mathrm{OD}=1$，$\mathrm{OE}=2-t$，$\angle\mathrm{ODE}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$2-t=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　$\dfrac{dt}{d\theta}=-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

t	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot 1(2-t)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{6} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} S\frac{dt}{d\theta}d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right\}\left\{-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\cos\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\sin\left(3\theta+\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta\\ &= \Bigg[\frac{1}{6}\cos\left(3\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\\ &\qquad +\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\Bigg]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{4\sqrt{3}-2\pi}$

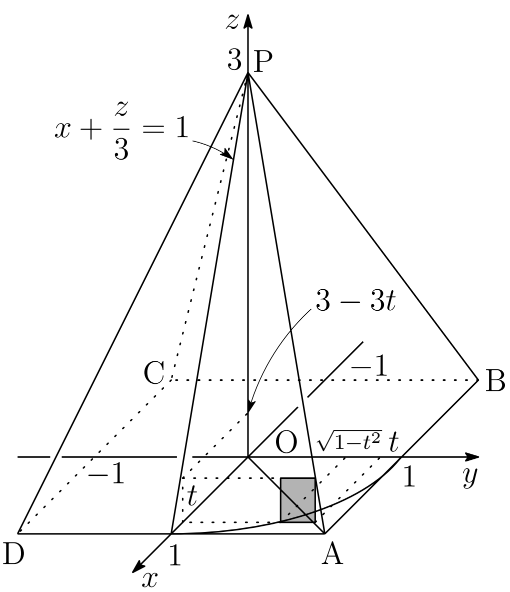
1998 東京大学 (理科) 前期

xyz 空間に 5 点 A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(-1,\ 1,\ 0)$，C$(-1,-1,\ 0)$，D$(1,-1,\ 0)$，P$(0,\ 0,\ 3)$ をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

のみたす部分の体積を求めよ．

解答 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq x$，$x+\dfrac{z}{3} \leqq 1$，$z \geqq 0$，$x^2+y^2 \geqq 1$ の表す領域を平面 $x=t\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1\right)$ による切り口は



$$(t, \sqrt{1-t^2},\ 0),$$
$$(t,\ t,\ 0),$$
$$(t, \sqrt{1-t^2},\ 3-3t),$$
$$(t,\ t,\ 3-3t)$$

を頂点とする長方形であるから，その面積を $S(t)$ とすると

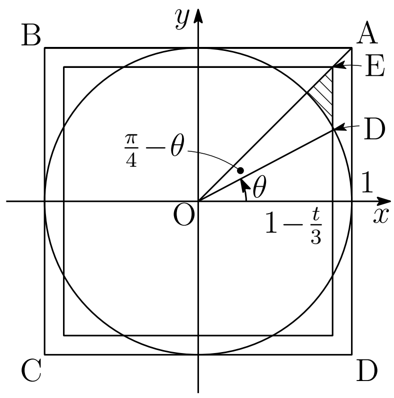
$$S(t)=(t-\sqrt{1-t^2})(3-3t)$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{8} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)\,dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (t-\sqrt{1-t^2})(3-3t)\,dt \\
&= \left[\ \frac{3}{2}t^2 - t^3 - (1-t^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} - 3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}-3\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{4+4\sqrt{2}-3\pi}$

別解 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq x$，$x^2+y^2 \geqq 1$，$x+\dfrac{z}{3} \leqq 1$ で囲まれた領域を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 3-\frac{3}{\sqrt{2}})$ で切った切り口は右の図の斜線部分で，その面積を S とする．右の図の OD と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると



$$\angle\mathrm{DOE} = \frac{\pi}{4}-\theta, \quad \cos\theta = 1-\frac{t}{3}$$
$$\mathrm{OD}=1, \quad \mathrm{OE}=\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)=\sqrt{2}\cos\theta$$

ゆえに　　$t=3-3\cos\theta$，　$\dfrac{dt}{d\theta}=3\sin\theta$

t	$0 \longrightarrow 3-\frac{3}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \end{aligned}$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S\frac{dt}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}\cdot 3\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta\right\}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{-\frac{3}{4\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4\sqrt{2}}\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta\right\}d\theta \\ &= \left[-\frac{3}{4\sqrt{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{4+4\sqrt{2}-3\pi}$ ■