平成 24 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B・C　平成 24 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5 6

1 (1) 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする．2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ．

(2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ．

2 (1) $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ．

(2) 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す．10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか．

3 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C，直線 $y = ax$ を l とする．

(1) C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲内にあるとき，C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

4 n を正の整数とする．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．

(1) a_2 および a_3 を求めよ．

(2) 一般項 a_k を求めよ．

(3) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$ を示せ．

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と異なる任意の 2 点 P，Q に対して $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ．ただし，P′，Q′ はそれぞれ P，Q の f による像を表す．

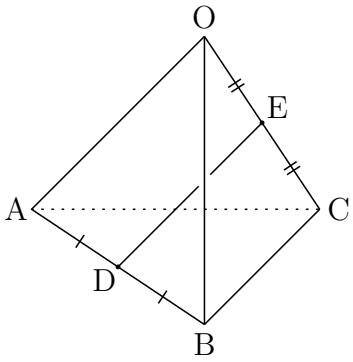
(1) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ を示せ．

(2) 1 次変換 f により，点 $(1,\ \sqrt{3})$ が点 $(-4,\ 0)$ に移るとき，A を求めよ．

6 xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3}, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3}, -1,\ 0)$ をとる．四面体 PABC の $x^2 + y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{c}-\vec{a}$$

このとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\dfrac{1}{2}(|\vec{c}-\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) ○を偶数，△を 1 または 3 とすると，目の積が 10 の倍数となる組合せは

$$\{5,\ 5,\ \bigcirc\},\quad \{5,\ \bigcirc,\ \bigcirc\},\quad \{5,\ \bigcirc,\ \triangle\}$$

したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}\times 3+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\times 3+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\times 3!=\frac{9+27+36}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

別解 偶数が出ない事象を A，5 が出ない事象を B とすると，求める確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\&=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{2}{6}\right)^3\\&=\frac{216-27-125+8}{216}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

■

2 (1) $N=3^{100}$ とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n=\frac{1(3^{100}-1)}{3-1}=\frac{3^{100}-1}{2}=\frac{N-1}{2}$

このとき $\quad N-\dfrac{N-1}{2}=\dfrac{N+1}{2}>0,\quad \dfrac{N-1}{2}-\dfrac{N}{3}=\dfrac{N-3}{6}>0$

ゆえに $\quad \dfrac{N}{3}<\dfrac{N-1}{2}<N \quad \cdots(*)$

ここで $\quad \log_{10}N=\log_{10}3^{100}=100\log_{10}3=47.71<48,$

$\log_{10}\dfrac{N}{3}=\log_{10}N-\log_{10}3=47.71-0.4771>47$

$(*)$ の辺々の常用対数をとると，上の結果により

$$47<\log_{10}\frac{N}{3}<\log_{10}\frac{N-1}{2}<\log_{10}N<48$$

したがって $\quad 10^{47}<\dfrac{N-1}{2}<10^{48}$

よって，求める桁数は $\quad$ **48** (桁)

(2) k を 99 以下の自然数とし，$k^2\leqq n<(k+1)^2$ のとき $\quad[\sqrt{n}\,]=k$

このとき，条件を満たす n は，$n=k^2,\ k(k+1),\ k(k+2)$ の 3 個ある．

$n=100^2$ のとき，$[\sqrt{n}\,]$ は n の約数である．

よって，求める個数は $\quad 3\times99+1=$ **298** (個) ■

3 (1) $y=x^3-3x^2+2x$ と $y=ax$ から y を消去すると

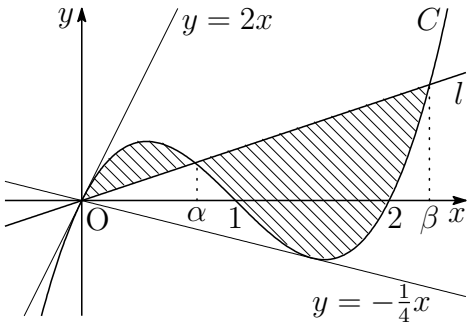
$$x(x^2-3x+2-a)=0$$

C と l が原点以外の共有点をもつから，2 次方程式

$$x^2-3x+2-a=0 \quad \cdots(*)$$

が実数解をもつ．したがって，係数について

$$(-3)^2-4\cdot1(2-a)\geqq0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a\geqq-\frac{1}{4}}$$



(2) $f(x)=x^3-3x^2+2x$ とすると　$f'(x)=3x^2-6x+2$

したがって，C の原点における接線の傾きは　$f'(0)=2$

$-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 2$ のとき，2 次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(0\leqq\alpha\leqq\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2-a\quad\cdots(**)$$

$f(x)-ax=x(x^2-3x+2-a)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\int_0^{\alpha}x(\alpha-x)(\beta-x)\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)+\alpha\}(x-\alpha)(\beta-x)\,dx\\&=\beta\int_0^{\alpha}x(\alpha-x)\,dx-\int_0^{\alpha}x^2(\alpha-x)\,dx\\&\qquad\qquad+\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)\,dx\\&=\beta\cdot\frac{1}{6}\alpha^3-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{12}\alpha^3(2\beta-\alpha)+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$(*)$ より，$\beta=3-\alpha$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}S(a)&=\frac{1}{12}\alpha^3\{2(3-\alpha)-\alpha\}+\frac{1}{12}\{(3-\alpha)-\alpha\}^3\cdot 3\\&=\frac{1}{4}\left\{\alpha^3(2-\alpha)+(3-2\alpha)^3\right\}\end{aligned}$$

$g(\alpha)=S(a)$ とおく．このとき，$(**)$ の第 1 式に注意して　$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{3}{2}$

$g(\alpha)=\dfrac{1}{4}\left\{2\alpha^3-\alpha^4+(3-2\alpha)^3\right\}$ より

$$\begin{aligned}g'(\alpha)&=\frac{1}{4}\left\{6\alpha^2-4\alpha^3-6(3-2\alpha)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\alpha^2(3-2\alpha)-3(3-2\alpha)^2\right\}\\&=\frac{1}{2}(3-2\alpha)(\alpha^2+6\alpha-9)=\frac{1}{2}(3-2\alpha)(\alpha+3+3\sqrt{2})(\alpha+3-3\sqrt{2})\end{aligned}$$

α	0	$\cdots$	$3\sqrt{2}-3$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		↘	極小	↗	

よって，$(**)$ より　$a=2-\alpha\beta=2-\alpha(3-\alpha)$

$=2-(3\sqrt{2}-3)\{3-(3\sqrt{2}-3)\}=\mathbf{38-27\sqrt{2}}$

解説

$C : y = ax^3 - 2akx^2 + cx$ $(a > 0)$ と $l : y = mx$ から，y を消去すると

$$x(ax^2 - 2akx + c - m) = 0$$

C と l の共有点の x 座標が $0,\ \alpha,\ \beta$ であるとき $(0 \leqq \alpha \leqq \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = \frac{c-m}{a} \quad \text{また} \quad 0 < \alpha \leqq k \leqq \beta$$

このとき，l の傾きに関係なく，$\alpha + \beta$ の値は一定である．

C と l で囲まれた部分の面積を S とすると[1]，前ページの計算と同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{S}{a} &= \int_0^{\alpha} x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= \frac{1}{12}\alpha^3(2\beta - \alpha) + \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta) \\
&= \frac{1}{12}\alpha^3\{2(2k-\alpha) - \alpha\} + \frac{1}{12}\{(2k-\alpha) - \alpha\}^3 \cdot 2k \\
&= \frac{1}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k-\alpha)^3\}
\end{aligned}$$

$f(\alpha) = S$ とおくと，$f(\alpha) = \dfrac{a}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k-\alpha)^3\}$ より

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \frac{a}{12}\{-12\alpha^3 + 12k\alpha^2 - 48k(k-\alpha)^2\} \\
&= \frac{a}{12}\{12\alpha^2(k-\alpha) - 48k(k-\alpha)^2\} \\
&= a(k-\alpha)(\alpha^2 + 4k\alpha - 4k^2) \\
&= a(k-\alpha)(\alpha + 2k + 2\sqrt{2}k)(\alpha + 2k - 2\sqrt{2}k)
\end{aligned}$$

α	0	$\cdots$	$2(\sqrt{2}-1)k$	$\cdots$	k
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

S が最大となるとき　$\alpha = 2(\sqrt{2}-1)k$，$\beta = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)k$　ゆえに　$\alpha : \beta = 1 : \sqrt{2}$

この結果を $(**)$ に適用すると，a は簡単に求めることができる． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

4 (1) $a_1 = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\quad a_{k+1} = -\dfrac{1}{k+n+1} + \dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

$k = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{1+n+1} + \frac{n}{1}a_1 = -\frac{1}{n+2} + n\cdot\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

$k = 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2+n+1} + \frac{n}{2}(a_1 + a_2) \\ &= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，k 以下のすべての自然数について

$$a_k = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \quad \cdots (*)$$

が成立すると仮定すると，漸化式により

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= -\frac{1}{n+k+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n+i-1} - \frac{1}{n+i}\right) \\ &= -\frac{1}{n+k+1} + \frac{n}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \end{aligned}$$

したがって，k を $k+1$ と置き換えたときも $(*)$ が成立する．

よって，すべての自然数 k について $(*)$ は成立するから，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}}$$

(3) (2) の結果から　　$a_k = \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$

$\dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)} < \dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ であるから

$$\frac{1}{n+k} < \sqrt{a_k} < \frac{1}{n+k-1}$$

$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < b_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1}$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1}$　　$\cdots(**)$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^1 = \log 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ \log(1+x)\ \Big]_0^1 = \log 2$$

$(**)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$

別解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{n+x}$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \Big[\ \log(n+x)\ \Big]_1^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n+1}{n+1} = \log 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-2}^{k-1} \frac{dx}{n+x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{n-1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \Big[\ \log(n+x)\ \Big]_{-1}^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n-1}{n-1} = \log 2$$

上の 2 式と $(**)$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$　■

5 (1) f による原点と異なる 3 点 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (x,\ y)$ の像が，それぞれ

$$(a,\ c),\ (b,\ d),\ (ax+by,\ cx+dy)$$

であるから，条件を満たすとき

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{1}=\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{1}=\frac{\sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

辺々を平方すると

$$a^2+c^2=b^2+d^2=\frac{(a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2+2(ab+cd)xy}{x^2+y^2}$$

したがって　　$a^2+c^2=b^2+d^2,\quad ab+cd=0\quad \cdots(*)$

よって，$a^2+c^2=b^2+d^2$ が成り立つ.

(2) (1) の結果から，$\vec{v}\neq\vec{0}$ のとき

$$\frac{|A\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{b^2+d^2}$$

条件から，$\vec{v}=(1,\ \sqrt{3})$ のとき，$A\vec{v}=(-4,\ 0)$ を上式に代入すると

$$\frac{4}{2}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{b^2+d^2}\quad \text{ゆえに}\quad a^2+c^2=b^2+d^2=4\quad \cdots(**)$$

f により点 $(1,\ \sqrt{3})$ が点 $(-4,\ 0)$ に移るから

$$(\#)\begin{cases} a+b\sqrt{3}=-4 \\ c+d\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$(*)$，$(**)$ より　$(b,\ d)=(\pm c,\ \mp a)$

(i) $(b,\ d)=(c,-a)$ のとき，これを $(\#)$ に代入すると

$$\begin{cases} a+c\sqrt{3}=-4 \\ c-a\sqrt{3}=0 \end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $(b,\ d)=(-c,\ a)$ のとき，これを $(\#)$ に代入すると

$$\begin{cases} a-c\sqrt{3}=-4 \\ c+a\sqrt{3}=0 \end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

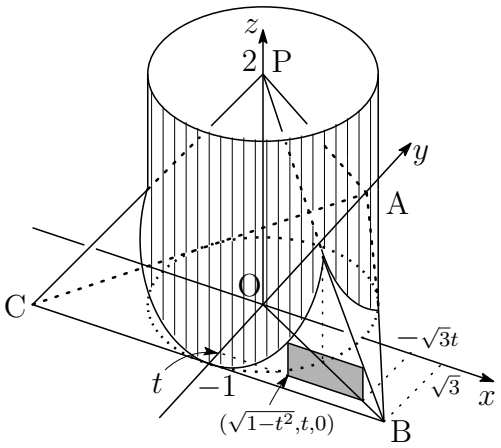
(i)，(ii) より　$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix}}$　**(複号同順)**　■

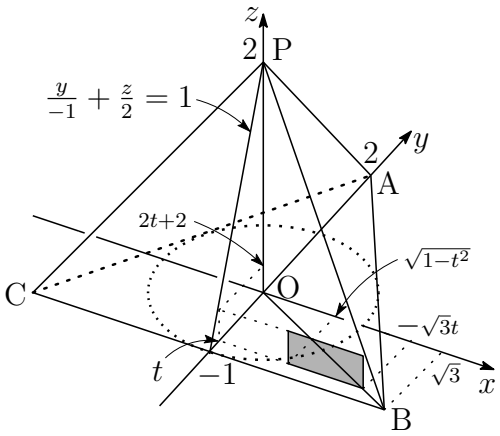
6 $x \geqq 0,\ y \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ -1 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2},\ 0 \leqq z \leqq 2y+2,\ x^2+y^2 \geqq 1$ の表す領域を平面 $y=t$ で切った切り口は $\left(-1 \leqq t \leqq -\dfrac{1}{2}\right)$

$$(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0),\ (-\sqrt{3}t,\ t,\ 0),\ (\sqrt{1-t^2},\ t,\ 2t+2),\ (-\sqrt{3}t,\ t,\ 2t+2)$$

を頂点とする長方形であるから，その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2}\,)(2t+2)$$





求める体積を V とすると

$$\frac{V}{6} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} S(t)\,dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2}\,)(2t+2)\,dt$$

$$= \left[-\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}t^3 + t^2\right) + \frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - 2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt$$

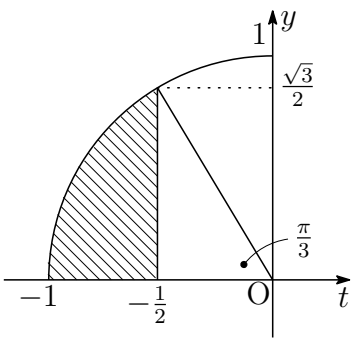
$$= \frac{5\sqrt{3}}{12} - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$$

よって　　$V = \mathbf{4\sqrt{3} - 2\pi}$

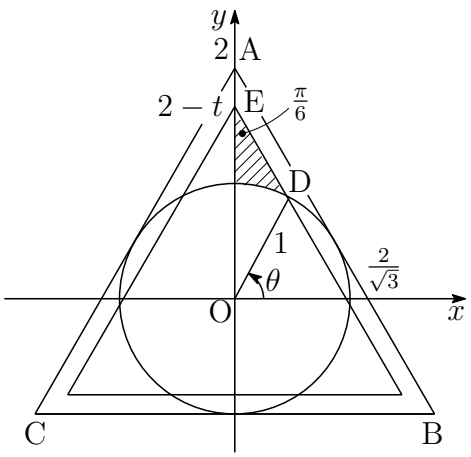
補足 $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt$ は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$



別解 $x \geqq 0$，$y \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x^2+y^2 \geqq 1$ および平面 ABP$(\sqrt{3}x+y+z=2)$ で囲まれた領域を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った切り口は右の図の斜線部分で，その面積を S とする．右の図の OD と x 軸の正の向きとなす角を θ とし，△ODE に正弦定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\angle\mathrm{ODE}} = \frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$\mathrm{OD}=1$，$\mathrm{OE}=2-t$，$\angle\mathrm{ODE}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$2-t=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　$\dfrac{dt}{d\theta}=-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

t	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 1(2-t)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta - \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{6} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} S\frac{dt}{d\theta}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta - \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right\}\left\{-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\cos\theta + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{1}{2}\sin\left(3\theta+\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta \\ &= \left[\ \frac{1}{6}\cos\left(3\theta+\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{4\sqrt{3}-2\pi}$

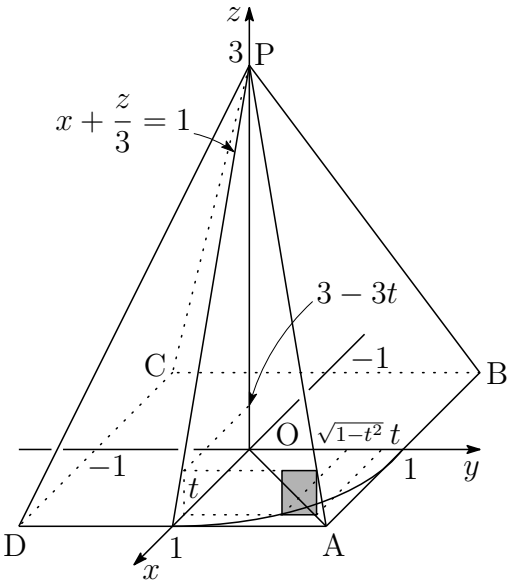
1998 東京大学 (理科) 前期

xyz 空間に5点 A$(1,\ 1,\ 0)$, B$(-1,\ 1,\ 0)$, C$(-1,-1,\ 0)$, D$(1,-1,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 3)$ をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

のみたす部分の体積を求めよ．

解答 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ x+\dfrac{z}{3} \leqq 1,$ $z \geqq 0,\ x^2+y^2 \geqq 1$ の表す領域を平面 $x=t\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1\right)$ による切り口は



$$(t, \sqrt{1-t^2},\ 0),$$
$$(t,\ t,\ 0),$$
$$(t, \sqrt{1-t^2},\ 3-3t),$$
$$(t,\ t,\ 3-3t)$$

を頂点とする長方形であるから，
その面積を $S(t)$ とすると

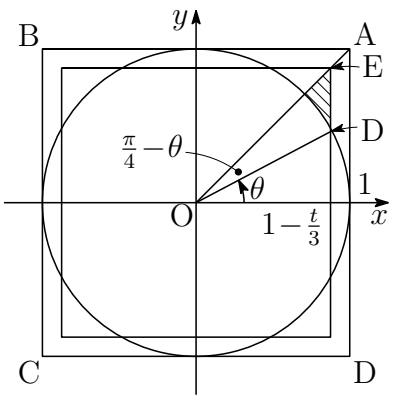
$$S(t)=(t-\sqrt{1-t^2})(3-3t)$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{8}&=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)\,dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(t-\sqrt{1-t^2})(3-3t)\,dt\\&=\left[\ \frac{3}{2}t^2-t^3-(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}-3\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{4+4\sqrt{2}-3\pi}$

別解 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ x^2+y^2 \geqq 1,\ x+\dfrac{z}{3} \leqq 1$ で囲まれた領域を平面 $z=t$ $\left(0 \leqq t \leqq 3-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ で切った切り口は右の図の斜線部分で，その面積を S とする．右の図の OD と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると



$$\angle \mathrm{DOE} = \frac{\pi}{4}-\theta, \quad \cos\theta = 1-\frac{t}{3}$$
$$\mathrm{OD}=1, \quad \mathrm{OE} = \sqrt{2}\left(1-\frac{t}{3}\right) = \sqrt{2}\cos\theta$$

ゆえに　$t = 3-3\cos\theta, \quad \dfrac{dt}{d\theta} = 3\sin\theta$

t	$0 \longrightarrow 3-\frac{3}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \end{aligned}$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S\frac{dt}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}\cdot 3\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta\right\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{-\frac{3}{4\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4\sqrt{2}}\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta\right\} d\theta \\ &= \left[-\frac{3}{4\sqrt{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

よって　$V = \mathbf{4+4\sqrt{2}-3\pi}$ ■