平成23年度　東京工業大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B・C　平成23年2月25日

1 n を自然数とする．xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す1次変換(移動ともいう)を f_n とする．次の問に答えよ．

(1) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る直線で，その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが2本あることを示し，この2直線の方程式を求めよ．

(2) (1)で得られた2直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}}$ を求めよ．

2 実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\, dt$$

とおく．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ を求めよ．

3 定数 k は $k>1$ をみたすとする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第1象限に含まれる部分を，2点 X，Y が $\mathrm{AY} = k\mathrm{AX}$ をみたしながら動いている．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径1の円と線分 OX，OY が交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を k を用いて表せ．

4 平面上に一辺の長さが1の正方形 D および D と交わる直線があるとする．この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問に答えよ．

(1) D と同じ平面上の直線 ℓ は D のどの辺にも平行でないものとする．軸とする直線は ℓ と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯1点で交わることを示せ．

(2) D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ．

解答例

1 (1) $A=\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ とおくと，A の特性方程式は

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda=1,\ 2$$

$A-E=\begin{pmatrix} -n & 1 \\ -n(n+1) & n+1 \end{pmatrix}$，$A-2E=\begin{pmatrix} -n-1 & 1 \\ -n(n+1) & n \end{pmatrix}$ より，
$\lambda=1,\ 2$ に対する固有ベクトルは，それぞれ次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

よって，求める 2 直線は　　$\boldsymbol{y=nx,\ y=(n+1)x}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n+1}\{(n+1)x-x^2\}\,dx-\int_0^n (nx-x^2)\,dx \\ &= \int_0^{n+1} x(n+1-x)\,dx-\int_0^n x(n-x)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{6}n^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(3n^2+3n+1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より，$S_n-\dfrac{1}{6}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\boldsymbol{2} \end{aligned}$$

■

2 (1) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$g(t)=\cos t-x\sin 2t=\cos t(1-2x\sin t)$ とおく．

(i) $x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$g(t) \geqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-x\sin 2t)\,dt=\Big[\ \sin t+\frac{x}{2}\cos 2t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq x$ のとき，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2x}$ とおくと

$$0 \leqq t \leqq \alpha \text{ のとき } g(t) \geqq 0, \quad \alpha \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } g(t) \leqq 0$$

であるから，$g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t) = \sin t + \dfrac{x}{2}\cos 2t$ とおくと

$$f(x) = \int_0^{\alpha} g(t)\,dt - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt = 2G(\alpha) - G(0) - G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ここで $\quad G(0) = \dfrac{x}{2}, \quad G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{x}{2},$

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \sin\alpha + \frac{x}{2}\cos 2\alpha = \sin\alpha + \frac{x}{2}(1 - 2\sin^2\alpha) \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\left\{1 - 2\left(\frac{1}{2x}\right)^2\right\} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

よって $\quad f(x) = 2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4x}\right) - \dfrac{x}{2} - \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) = x + \dfrac{1}{2x} - 1$

(i)，(ii) より $\quad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \left(x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ x + \dfrac{1}{2x} - 1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x\right) \end{cases} \quad \cdots(*)$

$\dfrac{1}{2} \leqq x$ のとき $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2} = \dfrac{(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)}{2x^2}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\sqrt{2} - 1$	$\nearrow$

よって　最小値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\sqrt{2} - 1}$

別解 $\dfrac{1}{2} \leqq x$ において，相加・相乗平均の関係により

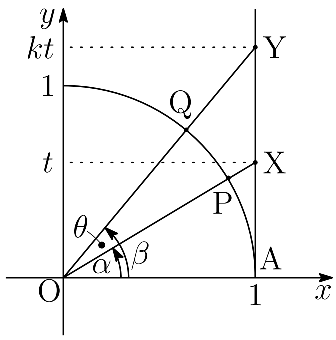
$$f(x) = x + \frac{1}{2x} - 1 \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{2x}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

(2) $(*)$ より $\displaystyle \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x + \frac{1}{2x} - 1\right) dx$

$$\begin{aligned} &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log x - x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2} \end{aligned}$$

■

3 条件から，$t > 0$ に対し，$\mathrm{X}(1,\ t)$，$\mathrm{Y}(1,\ kt)$，$\alpha = \angle\mathrm{AOX}$，$\beta = \angle\mathrm{AOY}$ とおくと



$$\tan\alpha = t, \quad \tan\beta = kt$$

$\theta = \angle\mathrm{POQ}$ とすると，$\theta = \beta - \alpha$ であるから

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{kt - t}{a + kt\cdot t}$$
$$= \frac{(k-1)t}{1 + kt^2} = \frac{k-1}{\frac{1}{t} + kt}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{t} + kt \geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot kt} = 2\sqrt{k} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta \leqq \frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，$S = \dfrac{1}{2}\sin\theta$ であるから，θ が最大のとき，S は最大となるから，このとき

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\left(\frac{k-1}{2\sqrt{k}}\right)^2}{1 + \left(\frac{k-1}{2\sqrt{k}}\right)^2} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta = \frac{k-1}{k+1}$$

よって，求める $\triangle\mathrm{OPQ}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{k-1}{2(k+1)}}$

別解 条件から，$t > 0$ に対し，$\mathrm{X}(1,\ t)$，$\mathrm{Y}(1,\ kt)$ とおくと

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right), \quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2t^2}},\ \frac{kt}{\sqrt{1+k^2t^2}}\right)$$

$S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|kt - t|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+k^2t^2}}$ であるから

$$4S^2 = \frac{(k-1)^2t^2}{(1+t^2)(1+k^2t^2)} = \frac{(k-1)^2t^2}{1 + (k^2+1)t^2 + k^2t^4} = \frac{(k-1)^2}{k^2 + 1 + \frac{1}{t^2} + k^2t^2}$$
$$\leqq \frac{(k-1)^2}{k^2 + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot k^2t^2}} = \frac{(k-1)^2}{k^2 + 1 + 2k} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$$

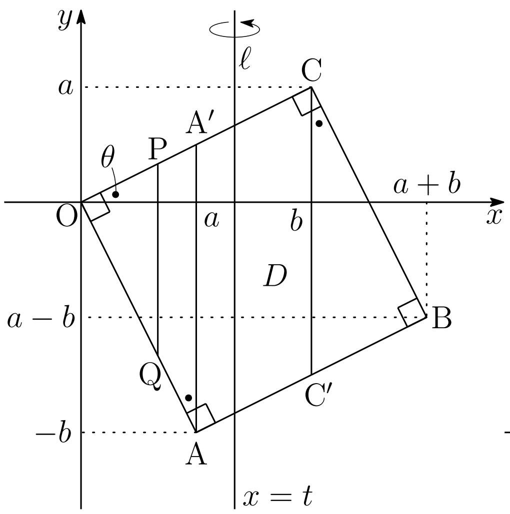
したがって　$S \leqq \dfrac{k-1}{2(k+1)}$　求める最大値は　$\dfrac{k-1}{2(k+1)}$ ■

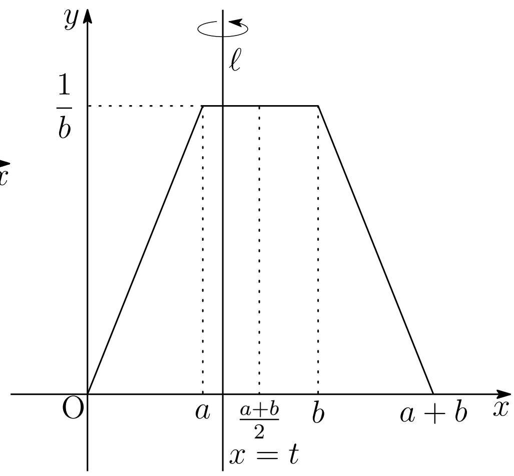
$\boxed{4}$ (1) 正方形OABCをD，Oを座標平面上の原点とし，左下の図のようにℓと平行にy軸をとり，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と$x$軸とのなす角が$\theta$が$0<\theta \leqq \frac{\pi}{4}$となるように点Cを定め，$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$とおくと，$\mathrm{A}(a, -b)$，$\mathrm{C}(b,\ a)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$より，$\mathrm{B}(a+b,\ a-b)$．$\ell$と平行に$\mathrm{AA}'$，$\mathrm{CC}'$をとると

$$\mathrm{AA}'=\mathrm{CC}'=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{b}$$

Dと交わるℓと平行な線分PQの長さを表す関数を$f(x)$とすると

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{ab} & (0\leqq x\leqq a)\\[2mm] \dfrac{1}{b} & (a\leqq x\leqq b)\\[2mm] \dfrac{a+b-x}{ab} & (b\leqq x\leqq a+b)\end{cases}$$





$y=f(x)$のグラフは$x=\dfrac{a+b}{2}$に関して対称であるから，ℓの方程式を$x=t$とすると，$0\leqq t\leqq \dfrac{a+b}{2}$の範囲について調べればよい．

Dを$x=t$のまわりに回転させた立体の体積を$V(t)$とすると

$$\begin{aligned}V(t)&=2\pi\int_t^{a+b}(x-t)f(x)\,dx\\&=2\pi\int_0^{a+b}xf(x)\,dx-2\pi\int_0^t xf(x)\,dx-2\pi t\int_t^{a+b}f(x)\,dx\\&\leqq 2\pi\int_0^{a+b}xf(x)\,dx=V(0)\qquad(\text{等号は}\ t=0\ \text{のとき})\end{aligned}$$

$V(t)$は$t=0$で最大となり，このとき，ℓはDと1点で交わる．

(2) (1) の結果から

$$\frac{V(0)}{2\pi} = \int_0^{a+b} xf(x)\,dx = \int_0^{\frac{a+b}{2}} xf(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b} xf(x)\,dx$$

ここで，$x = a+b-u$ とおくと $\dfrac{dx}{du} = -1$

x	$\frac{a+b}{2} \longrightarrow a+b$
u	$\frac{a+b}{2} \longrightarrow 0$

このとき，$f(a+b-x) = f(x)$ であることに注意して

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b} xf(x)\,dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{0} (a+b-u)f(a+b-u)(-du) \\ &= \int_0^{\frac{a+b}{2}} (a+b-x)f(x)\,dx\end{aligned}$$

さらに，$\displaystyle\int_0^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$ は (1) のグラフの台形の面積の $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{V(0)}{2\pi} &= \int_0^{\frac{a+b}{2}} xf(x)\,dx + \int_0^{\frac{a+b}{2}} (a+b-x)f(x)\,dx \\ &= (a+b)\int_0^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \\ &= (a+b)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{(b-a)+(a+b)\}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

したがって　$V(0) = \pi(a+b) = \pi(\sin\theta + \cos\theta) = \sqrt{2}\pi\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

よって　　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$

別解 $V(0)$ は円錐台の体積から三角錐の体積を引いたものである．

$$V(0) = \frac{\pi}{3}\{(a+b)^2 + (a+b)^2b + b^2\}\frac{1}{b} - \frac{\pi}{3}\cdot a^2\cdot\frac{1}{b} = \pi(a+b)$$

解説 D の面積は $S=1$，ℓ から D の重心までの距離 h の最大値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．
回転体の体積は $V = 2\pi hS$ であるから(パップス・ギュルダンの定理 [1])

$$V(0) \leqq \sqrt{2}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)