

平成22年度 東京工業大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成22年2月25日

問題 1 2 3 4

1 $f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$ とする.

(1) $0 < x < \pi$ において, $f(x) = 0$ は唯一の解を持つことを示せ.

(2) $J = \int_0^\pi |f(x)| dx$ とする. (1) の唯一の解を α とするとき, J を $\sin \alpha$ の式で表せ.

(3) (2) で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ.

2 a を正の定数とする. 正の実数 x についての方程式

$$(*) \quad x = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \right\rfloor$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \dots$ とする. ここに $\lfloor \cdot \rfloor$ はガウスの記号で, 実数 u に対し, $\lfloor u \rfloor$ は u 以下の最大の整数を表す.

(1) $a = 7, 8, 9$ の各々について $(*)$ の解があるかどうかを判定し, ある場合は解 x を求めよ.

(2) a_1, a_2 を求めよ.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ を求めよ.

3 1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く. このとき, 引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数である確率を $p(n)$ とする.

(1) $p(8)$ を求めよ.

(2) 正の整数 k に対し, $p(3k+2)$ を k で表せ.

4 a を正の定数とする. 原点を O とする座標平面上に定点 $A = A(a, 0)$ と, A と異なる動点 $P = P(x, y)$ をとる. 次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し

$$\frac{AQ}{AP} \leq 2 \quad \text{ならば} \quad \frac{QP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA}$$

を満たす P からなる領域を D とする. D を図示せよ.

解答例

- 1** (1) $f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$ より $f'(x) = -x \cos x$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	(2)

上の増減表により, $0 < x < \pi$ において, $f(x)$ は唯一の解をもつ.

- (2) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = x - 2 \sin x + x \cos x$ とすると

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi |f(x)| dx = - \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\pi f(x) dx \\ &= - \left[F(x) \right]_0^\alpha + \left[F(x) \right]_\alpha^\pi = F(0) + F(\pi) - 2F(\alpha) \end{aligned}$$

このとき $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$, $F(\alpha) = \alpha(1 + \cos \alpha) - 2 \sin \alpha$

また, α ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) は $f(x) = 0$ の解であるから

$$1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{したがって} \quad F(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (1 + \cos \alpha) - 2 \sin \alpha = -\sin \alpha$$

$$\text{よって} \quad J = 0 + 0 - 2(-\sin \alpha) = 2 \sin \alpha$$

- (3) $J = 2 \sin \alpha$ と $\sqrt{2}$ の大小, すなわち, $\sin \alpha$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の大小について比較する.

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - \cos \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{4(\sqrt{2} + 1) - 3\pi}{4\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2} > 1.41$, $\pi < 3.15$ であるから

$$4(\sqrt{2} + 1) - 3\pi > 4 \times 2.41 - 3 \times 3.15 = 0.19 > 0$$

$$\text{したがって} \quad f(\alpha) < f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$(1) \text{ の増減表により } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \sin \alpha > \sin \frac{3}{4}\pi$$

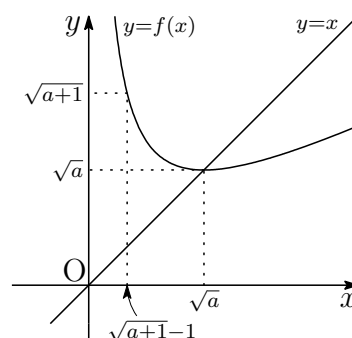
$$\text{すなわち} \quad \sin \alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad J = 2 \sin \alpha > \sqrt{2}$$



2 (1) $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ とすると ($x > 0$)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

x	(0)	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$



$f(x) - 1 < [f(x)] \leq f(x)$ であるから, $x = [f(x)]$ の解が存在する範囲は

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) - 1 < x \leq \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

ゆえに $\begin{cases} x^2 + 2x - a > 0 \\ x^2 \leq a \end{cases}$ これを解いて $\sqrt{a+1} - 1 < x \leq \sqrt{a}$

$$\text{このとき } f(\sqrt{a+1} - 1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a+1} - 1 + \frac{a}{\sqrt{a+1} - 1} \right) = \sqrt{a+1}$$

$$[f(\sqrt{a+1} - 1)] = [\sqrt{a+1}] > \sqrt{a+1} - 1$$

$$[f(\sqrt{a})] = [\sqrt{a}] \leq \sqrt{a}$$

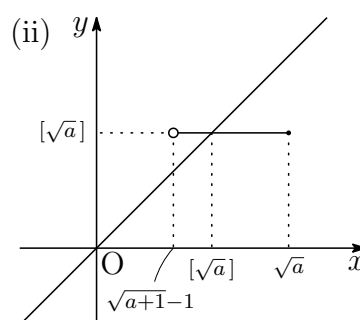
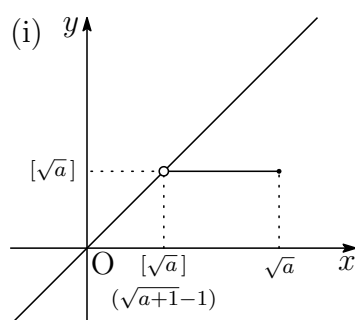
a は正の整数であるから

$$(i) [\sqrt{a+1}] = [\sqrt{a}] + 1 \quad \text{または} \quad (ii) [\sqrt{a+1}] = [\sqrt{a}]$$

(i) を満たすとき, $[\sqrt{a+1}] = \sqrt{a+1}$, すなわち, $a+1$ は平方数である.

(ii) を満たすとき, $[\sqrt{a+1}] < \sqrt{a+1}$, すなわち, $a+1$ は平方数でない.

$y = [f(x)]$ および $y = x$ のグラフは ($\sqrt{a+1} - 1 < x \leq \sqrt{a}$)



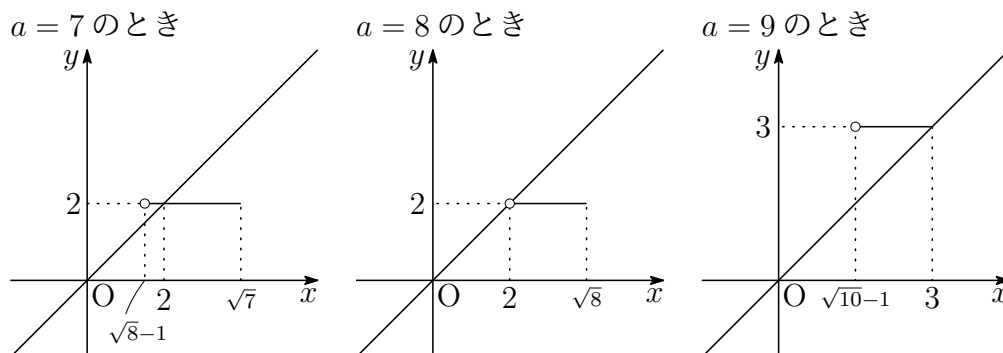
したがって $a+1$ が平方数のとき, (*) は解をもたない.

$a+1$ が平方数でないとき, (*) の解は $[\sqrt{a}]$

よって $a = 7$ のとき, $(*)$ の解は $[\sqrt{7}] = 2$

$a = 8$ のとき, $(*)$ は解を持たない.

$a = 9$ のとき, $(*)$ の解は $[\sqrt{9}] = 3$



- (2) (1) の結果より $a + 1$ が平方数であるから, $a + 1$ は 2 以上の自然数であることに注意して

$$a_n + 1 = (n + 1)^2 \quad \text{したがって} \quad a_n = n^2 + 2n$$

よって $a_1 = 3, a_2 = 8$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

補足 $a + 1$ が平方数でないとき, $(*)$ は解をもつから, 自然数 n, k に対して

$$a = n^2 + k \quad (0 \leq k < 2n)$$

とおくと, $[\sqrt{a}] = n$ であるから

$$f([\sqrt{a}]) = f(n) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{n^2 + k}{n} \right) = n + \frac{k}{2n}$$

$$\text{したがって} \quad [f([\sqrt{a}])] = \left[n + \frac{k}{2n} \right] = n + \left[\frac{k}{2n} \right] = [\sqrt{a}]$$

よって, $[\sqrt{a}]$ は $(*)$ の解である. ■

- 3** (1) カードの小さい方の数字が3のとき, もう一方のカードの数字は

$\{4, 5, 6, 7, 8\}$ の5通り

カードの小さい方の数字が6のとき, もう一方のカードの数字は

$\{7, 8\}$ の2通り

よって
$$p(8) = \frac{5+2}{{}_8C_2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

- (2) カードの小さい方の数字が $3j$ のとき ($j = 1, 2, \dots, k$),
もう一方のカードの数字は

$\{3j+1, 3j+2, \dots, 3k+2\}$ の $3k+2-3j$ (通り)

これらの総数は

$$\sum_{j=1}^k (3k+2-3j) = k(3k+2) - \frac{3}{2}k(k+1) = \frac{k}{2}(3k+1)$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} p(3k+2) &= \frac{1}{{}_{3k+2}C_2} \cdot \frac{k}{2}(3k+1) \\ &= \frac{2}{(3k+2)(3k+1)} \cdot \frac{k(3k+1)}{2} = \frac{k}{3k+2} \end{aligned}$$

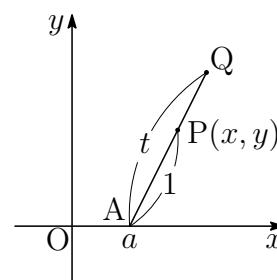
■

4 $t = \frac{AQ}{AP}$ とおくと, $0 \leq t \leq 2$, $\frac{QP}{AP} = |t - 1|$, $OA = a$

$$\frac{OP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA} \text{ より } \frac{QP}{AP} \leq \frac{OQ}{OA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{OQ}{OA} \geq |t - 1|$$

したがって $OQ^2 \geq (t - 1)^2 a^2 \quad \dots (*)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = (a, 0) + t(x - a, y) \\ &= (tx + (1 - t)a, ty) \end{aligned}$$



$OQ^2 = |\overrightarrow{OQ}|^2 = \{tx + (1 - t)a\}^2 + t^2y^2$ を $(*)$ に代入すると

$$\{tx + (1 - t)a\}^2 + t^2y^2 \geq (1 - t)^2 a^2$$

これを整理すると $t\{(x^2 + y^2 - 2ax)t + 2ax\} \geq 0 \quad \dots (**)$

$0 \leq t \leq 2$ に対して $(**)$ を満たす動点 $P(x, y)$ の方程式を求めればよい.

$t = 0$ は, $(**)$ を満たすので, $0 < t \leq 2$ において

$$f(t) = (x^2 + y^2 - 2ax)t + 2ax \geq 0$$

すなわち $f(0) \geq 0$ かつ $f(2) \geq 0$

ゆえに
$$\begin{cases} 2ax \geq 0 \\ 2(x^2 + y^2 - 2ax) + 2ax \geq 0 \end{cases}$$

よって
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

P は A と異なることに注意して, D の領域は右の図の斜線部分で, 境界線を含む.

