平成 21 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B・C　平成 21 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 点 P から放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A，B とし，線分 PA，PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする．PA，PB が直交するときの S の最小値を求めよ．

2 実数 a に対し，次の 1 次変換

$$f(x,\ y)=(ax+(a-2)y,\ (a-2)x+ay)$$

を考える．以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ．

(i) L は $(0,\ 1)$ を通る．

(ii) 点 Q が L 上にあれば，その f による像 $f(\mathrm{Q})$ も L 上にある．

3 N を正の整数とする．$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか．

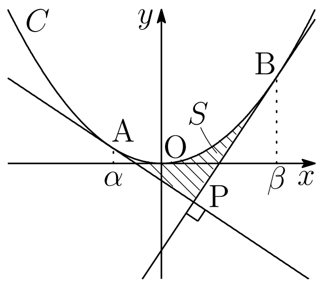
4 xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を ℓ とする．

(1) ℓ 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り ℓ と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ．

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする．ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $C: y=\dfrac{1}{2}x^2$ とすると　$y'=x$



$\alpha<\beta$ とし，C 上の点 $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$ における接線は

$$y-\frac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{1}{2}\beta^2\right)$ における接線は

$$y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2$$

これら 2 接線の交点 P の x 座標は，2 式から y を消去して

$$\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\quad \text{ゆえに}\quad (\alpha-\beta)(2x-\alpha-\beta)=0$$

$\alpha-\beta\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\right)\right\}dx\\
&=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx\\
&=\frac{1}{6}\Big[\,(x-\alpha)^3\,\Big]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{6}\Big[\,(x-\beta)^3\,\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

2 直線 PA，PB は直交するから　$\alpha\beta=-1$　$\alpha<\beta$ より　$\alpha<0<\beta$

ゆえに　$\beta-\alpha=\beta+\dfrac{1}{\beta}\geqq 2\sqrt{\beta\cdot\dfrac{1}{\beta}}=2$

したがって　$S\geqq\dfrac{1}{24}\cdot 2^3=\dfrac{1}{3}$　よって，求める S の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1次変換 f の表す行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}$$

とする．A の固有方程式は

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4a - 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda = 2,\ 2a-2$$

[1] $\underline{a \neq 2 \text{ のとき}}$

固有値 $\lambda = 2,\ 2a-2$ に対する固有ベクトルを，それぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．直線 L の方向ベクトルは

$$(A-E)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

これが $\vec{v}$ に一致することはないので，L の方向ベクトルは $\vec{u}$ であるから

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2}$$

このとき，L は点 $(0,\ 1)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{u}$ の直線

[2] $\underline{a = 2 \text{ のとき}}$

$A = 2E$ であるから，$A - E = E$ より，L の方向ベクトルは

$$(A-E)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき，L は点 $(0,\ 1)$ を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線

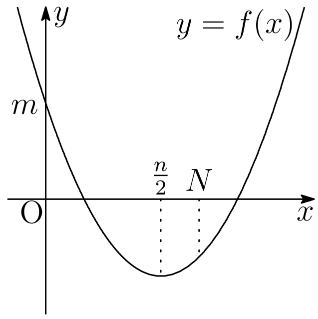
[1]，[2] より　$\boldsymbol{a = \frac{3}{2},\ 2}$

補足 対称行列の固有ベクトルは直交する [1]． ■

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf (p14 を参照)

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)=x^2-nx+m$ とおくと



$$f(x)=\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+m-\frac{n^2}{4}$$

$n \leqq 2N$ より，$\dfrac{n}{2} \leqq N$ であるから，

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

方程式 $f(x)=0$ が，N 以上の実数解をもつから

$$f(N)=N^2-nN+m \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad m \leqq N(n-N)$$

次の不等式を同時にみたす $(m,\ n)$ の組の個数を求めればよい $(m,\ n$ は整数$)$．

$$\begin{cases} 1 \leqq m \leqq 2N & \cdots ① \\ 1 \leqq n \leqq 2N & \cdots ② \\ m \leqq N(n-N) & \cdots ③ \end{cases}$$

m は正の整数であるから，②，③ より，n の取りうる値は

$$n=N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N$$

(i) $n=N+1$ のとき　①，③ より　$1 \leqq m \leqq N$

(ii) $n=N+k$ のとき $(k=2,3,\cdots,N)$，③ から　$m \leqq kN$

$2N \leqq kN$ であるから，①，③ より　$1 \leqq m \leqq 2N$

(i)，(ii) より，求める個数は

$$1\cdot N+(N-1)\cdot 2N=\boldsymbol{N(2N-1)}$$

■

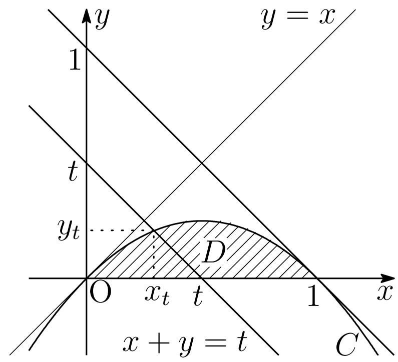
$\boxed{4}$ (1) ℓ の方向ベクトルは $\vec{v} = (1,\ 1,\ 1)$

点 $\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$ を通り，ℓ に垂直な平面上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(1,\ 1,\ 1) \perp \left(x - \frac{t}{3},\ y - \frac{t}{3},\ z - \frac{t}{3}\right) \quad ゆえに \quad x + y + z = t$$

これが xy 平面上の点であるから　　$\boldsymbol{x + y = t}$

(2) xy 平面において，曲線 $y = x(1 - x)$ と直線 $x + y = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ との交点を $(x_t,\ y_t)$ とすると



$$\begin{aligned} x_t &= 1 - \sqrt{1 - t}, \\ y_t &= t - 1 + \sqrt{1 - t} \\ &= (1 - \sqrt{1 - t})\sqrt{1 - t} \end{aligned}$$

3 点 $\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$，$(x_t,\ y_t,\ 0)$，$(t,\ 0,\ 0)$ を順に P，Q，R とすると，$x_t + y_t = t$ に注意して

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= \left(x_t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(y_t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 \\ &= {x_t}^2 + {y_t}^2 - \frac{2t}{3}(x_t + y_t) + \frac{t^2}{3} \\ &= (x_t + y_t)^2 - 2x_t y_t - \frac{t^2}{3} \\ &= \frac{2t^2}{3} - 2(1 - \sqrt{1 - t})^2\sqrt{1 - t}, \\ \mathrm{PR}^2 &= \left(t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2t^2}{3} \end{aligned}$$

$s = \mathrm{OP}$ とすると　$s = \frac{t}{\sqrt{3}}$，$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

s	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$
t	$0 \longrightarrow 1$

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2)\, ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 2(1 - \sqrt{1 - t})^2\sqrt{1 - t}\, dt$$

$u=\sqrt{1-t}$ とおくと　$t=1-u^2$　$\dfrac{dt}{du}=-2u$

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^0 2(1-u)^2u\cdot(-2u)\,du \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^1 u^2(1-u)^2\,du \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5=\frac{2\sqrt{3}}{45}\end{aligned}$$

よって，求める回転体の体積は　$V=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{45}\pi}$

補足　定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる [2]. ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$