

平成 20 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 20 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

- 1 正の実数 a, b に対し, $x > 0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする.

- (1) 接点の座標 (s, t) を a を用いて表せ. また, b を a の関数として表せ.
(2) $0 < h < s$ をみたす h に対し, 直線 $x = h$ および 2 つの曲線 $y = x^a$, $y = \log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする. $\lim_{h \rightarrow 0} A(h)$ を a で表せ.

- 2 実数 x に対し, x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする. a, b を正の実数とするととき, 極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$$

が収束するような実数 c の最大値と, そのときの極限值を求めよ.

- 3 いびつなサイコロがあり, 1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする. このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし, 1 回目に奇数, 2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする.

- (1) $P \geq \frac{1}{6}$ であることを示せ. また, 等号が成立するための必要十分条件を求めよ.
(2) $\frac{1}{4} \geq Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ.

- 4 平面の原点 O を端点とし, x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha, \alpha$ (ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$) である半直線を L_1, L_2 とする. L_1 上に点 P , L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり, 点 R を, 直線 PQ に対し原点 O の反対側に $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる.

- (1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき, 点 R の座標を求めよ.
(2) 2 点 P, Q が, 線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1, L_2 上を動くとき, 点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^a$, $g(x) = \log bx$ とおくと $f'(x) = ax^{a-1}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$
2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ のグラフが (s, t) で接するとき

$$t = f(s) = g(s), \quad f'(s) = g'(s)$$

$$\text{したがって} \quad t = s^a = \log bs, \quad as^{a-1} = \frac{1}{s} \quad \dots (*)$$

$$\text{上の第2式から} \quad as^a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s^a = a^{-1} \quad \text{よって} \quad t = a^{-1}$$

$$\text{また, } s^a = a^{-1} \text{ より } s = a^{-\frac{1}{a}}$$

$$(*) \text{ の第1式から } \frac{1}{a} = \log bs \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{ゆえに} \quad bs = e^{\frac{1}{a}}$$

$$\text{したがって} \quad ba^{-\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a}} \quad \text{よって} \quad b = a^{\frac{1}{a}} e^{\frac{1}{a}}$$

- (2) $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ とおくと ($x > 0$)

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{a}{x}(x^a - a^{-1}) = \frac{a}{x}(x^a - s^a)$$

$\varphi(x)$ の増減表は, $\varphi(s) = f(s) - g(s) = 0$ に注意して

x	(0)	$\dots$	s	$\dots$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$0 < h < s$ をみたす h に対し, 直線 $x = h$ および2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 $A(h)$ は, $s^a = a^{-1}$, $\textcircled{1}$ に注意して

$$\begin{aligned} A(h) &= \int_h^s \{f(x) - g(x)\} dx = \int_h^s (x^a - \log bx) dx \\ &= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} - x \log bx + x \right]_h^s \\ &= \frac{s^{a+1}}{a+1} - \frac{h^{a+1}}{a+1} - s \log bs + h \log bh + s - h \\ &= s \left(\frac{s^a}{a+1} - \log bs + 1 \right) - \frac{h^{a+1}}{a+1} + h \log bh - h \\ &= a^{-\frac{1}{a}} \left\{ \frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{a} + 1 \right\} - \frac{h^{a+1}}{a+1} + h \log bh - h \\ &= \frac{a^{1-\frac{1}{a}}}{a+1} - \frac{h^{a+1}}{a+1} + h \log b + h \log h - h \quad \dots (**)$$

ここで, $\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \log x$ について

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\lambda'(x)$		$-$	0	$+$
λ		$\searrow$	2	$\nearrow$

$0 < x < 1$ において $\frac{2}{\sqrt{x}} + \log x > 0$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2\sqrt{x} < x \log x < 0$$

$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

上の結果に注意すると, $(**)$ から $\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = \frac{a^{1-\frac{1}{a}}}{a+1}$

補足 $x > 0$ のとき $\int_0^x (e^t - 1) dt > 0$ ゆえに $e^x - 1 - x > 0$

さらに $\int_0^x (e^t - 1 - t) dt > 0$ ゆえに $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0$

$x > 0$ のとき $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$h = e^{-x}$ とおくと, $h \rightarrow +0$ のとき, $x \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} h \log h = \lim_{x \rightarrow \infty} (-xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x}\right) = 0$$



2 与えられた $f(x)$ について、一般に次が成立する.

$$x \leq f(x) < x + 1, \quad f(x + n) = f(x) + n \quad (n \text{ は整数})$$

$$x > 0 \text{ に対して} \quad px + q \leq f(px + n) < px + q + 1$$

$$\text{したがって} \quad p + \frac{q}{x} \leq \frac{f(px + q)}{x} < p + \frac{q + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(p + \frac{q}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(p + \frac{q + 1}{x} \right) = p \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(px + q)}{x} = p$$

(i) $a \neq b$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax - 7)} - \frac{1}{f(bx + 3)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \cdot \frac{f(bx + 3) - f(ax - 7)}{f(ax - 7)f(bx + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{c-1} \frac{\frac{f(bx + 3) - f(ax - 7)}{x}}{\frac{f(ax - 7)}{x} \cdot \frac{f(bx + 3)}{x}} \end{aligned}$$

これが収束するような実数 c の最大値は **1**, そのときの極限值は $\frac{b - a}{ab}$

(ii) $a = b$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax - 7)} - \frac{1}{f(ax + 3)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \cdot \frac{f(ax + 3) - f(ax - 7)}{f(ax - 7)f(ax + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \cdot \frac{f(ax) + 3 - \{f(ax) - 7\}}{f(ax - 7)f(ax + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^c \cdot \frac{10}{f(ax - 7)f(ax + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{c-2} \frac{\frac{10}{x}}{\frac{f(ax - 7)}{x} \cdot \frac{f(ax + 3)}{x}} \end{aligned}$$

これが収束するような実数 c の最大値は **2**, そのときの極限值は $\frac{10}{a^2}$ ■

- 3** (1) サイコロを1回ふって i の目が出る確率を p_i とする ($i = 1, 2, \dots, 6$).
コーシー・シュワルツの不等式により

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\ \geq (1p_1 + 1p_2 + 1p_3 + 1p_4 + 1p_5 + 1p_6)^2$$

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ であるから

$$6(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \geq 1$$

$$\text{よって } P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \geq \frac{1}{6}$$

また、上式において等号が成立するための必要十分条件は

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

- (2) サイコロを1回ふって奇数の目が出る確率を x とすると、1回目に奇数、2回目に偶数の目が出る確率 Q は

$$Q = x(1-x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \quad \dots (*)$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = 1 \text{ より}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) \\ + 2(p_1p_3 + p_1p_5 + p_3p_5) + 2(p_2p_4 + p_2p_6 + p_4p_6) = 1$$

したがって

$$P + 2Q + 2(p_1p_3 + p_1p_5 + p_3p_5) + 2(p_2p_4 + p_2p_6 + p_4p_6) = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$(p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_5)^2 + (p_3 - p_5)^2 \\ + (p_2 - p_4)^2 + (p_2 - p_6)^2 + (p_4 - p_6)^2 \geq 0 \\ 2P - 2(p_1p_3 + p_1p_5 + p_3p_5) - 2(p_2p_4 + p_2p_6 + p_4p_6) \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$3P + 2Q \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P \quad \dots (**)$$

$$(*), (**) \text{ より } \quad \frac{1}{4} \geq Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$$

■

4 (1) $p = OP$, $q = OQ$ とすると

$$P(p \cos \alpha, -p \sin \alpha), \quad Q(q \cos \alpha, q \sin \alpha)$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} (p - q) \cos \alpha \\ -(p + q) \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = 1 \text{ より}$$

$$(p - q)^2 \cos^2 \alpha + (p + q)^2 \sin^2 \alpha = 1 \quad \cdots (*)$$

$\overrightarrow{QR}$ は $\overrightarrow{QP}$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OQ} + \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \overrightarrow{QP} \\ &= \begin{pmatrix} q \cos \alpha \\ q \sin \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p - q) \cos \alpha \\ -(p + q) \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p + q)(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \\ (p - q)(-\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha) \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \begin{pmatrix} (p + q) \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \\ (p - q) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \end{pmatrix} \quad \cdots (**)$$

線分 PQ が x 軸と直交するとき, $p = q$ であるから, これを (*) に代入すると

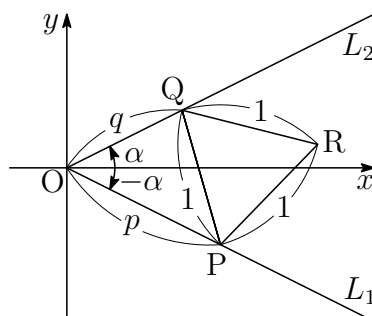
$$(2p)^2 \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p = q = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cot \alpha + \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad R \left(\frac{\cot \alpha + \sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

別解 複素数平面上に 2 点 $P(p(\cos \alpha - i \sin \alpha))$, $Q(q(\cos \alpha + i \sin \alpha))$ をとると, 点 R は

$$\begin{aligned} & q(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \{p(\cos \alpha - i \sin \alpha) - q(\cos \alpha + i \sin \alpha)\} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2}(p + q)(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) + \frac{1}{2}(p - q)(-\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)i \\ &= (p + q) \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) + (p - q)i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \end{aligned}$$



(2) $R(x, y)$ とすると, $(**)$ より

$$x = (p + q) \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right), \quad y = (p - q) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

ゆえに
$$p + q = \frac{x}{\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}, \quad p - q = \frac{y}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$\frac{y^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)} \cos^2 \alpha + \frac{x^2}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)} \sin^2 \alpha = 1$$

したがって
$$\frac{x^2}{\left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{\sin \alpha} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{\cos \alpha} \right)^2} = 1$$

よって, 点 R は上の楕円の一部分である. ■