平成 16 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B・C　平成 16 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 $a,\ b$ を正の実数とする．

(1) 区間 $a < x$ における関数 $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ．

(2) 区間 $a < x$ における関数 $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2} - \dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $f(x),\ g(x)$ を連続な偶関数，m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$$

を証明せよ．

(2) 正の整数 $m,\ n$ が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき，

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$$

を証明せよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx$$

を求めよ．

3 3枚のコインP，Q，Rがある．P，Q，Rの表の出る確率をそれぞれ$p,\ q,\ r$とする．このとき次の操作をn回繰り返す．まず，Pを投げて表が出ればQを，裏が出ればRを選ぶ．次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中にいれる．

(1) n回ともコインQを選び，つぼの中にはk個の赤玉が入っている確率を求めよ．

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ．

(3) $n=2004,\ p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ．

4 $0<r<1$とする．空間において，点$(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径rの球と点$(1,\ 0,\ 0)$を中心とする半径$\sqrt{1-r^2}$の球との共通部分の体積を$V(r)$とする．次の問いに答えよ．

(1) $V(r)$を求めよ．

(2) rが$0<r<1$の範囲を動くとき，$V(r)$を最大にするrの値および$V(r)$の最大値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}=x^4(x-a)^{-3}$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=4x^3\cdot(x-a)^{-3}+x^4\cdot(-3)(x-a)^{-4}\\ &=\frac{x^3}{(x-a)^4}\{4(x-a)-3x\}=\frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}\end{aligned}$$

したがって，区間 $a<x$ における関数 $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(a)	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{256}{27}a$	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^3}=\infty$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より

$$\begin{aligned} g'(x)&=-\frac{2}{(x-a)^3}-\frac{3b}{x^4}=-\frac{2}{x^4}\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3}{2}b\right\}\\ &=-\frac{2}{x^4}\left\{f(x)-\frac{3}{2}b\right\}\end{aligned}$$

(i) $\dfrac{256}{27}a-\dfrac{3}{2}b\geqq 0$ のとき，(1) の結果から　$g'(x)\leqq 0\ (a<x)$
したがって，$g(x)$ は単調減少となり，不適．

(ii) $\dfrac{256}{27}a-\dfrac{3}{2}b<0$，すなわち，$\dfrac{3}{2}b>\dfrac{256}{27}a$ のとき，(1) の結果から

$$f(\alpha)=f(\beta)=\frac{3}{2}b,\quad \alpha<4a<\beta$$

を満たす α，β が存在する．このとき

x	(a)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

$\min\{g(\alpha),\,0\}<k<g(\beta)$ を満たす k をとると，直線 $y=k$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる．

(i),(ii) より　必要十分条件は　$\dfrac{3}{2}b>\dfrac{256}{27}a$　すなわち　$\boldsymbol{b>\dfrac{512}{81}a}$　■

2 (1) $h(x)=f(\sin x)g(\cos x)$ とおくと，$f(x)$，$g(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned} h(x+\pi) &= f(\sin(x+\pi))g(\cos(x+\pi)) \\ &= f(-\sin x)g(-\cos x) \\ &= f(\sin x)g(\cos x) = h(x) \end{aligned}$$

上式より，整数 k について，$h(x+(k-1)\pi)=h(x)$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{m\pi} h(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} h(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi} h(x+(k-1)\pi)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi} h(x)\,dx = m\int_0^{\pi} h(x)\,dx \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$

(2) $\displaystyle I_n=\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)}\,dx$ とおく．

$f(x)=|x|$，$\displaystyle g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ とすると，$f(x)$，$g(x)$ は偶関数である．

$h(x)=f(x)g(x)$ とすると，$h(x)\geqq 0$ であるから，$m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ を満たす正の整数 m，n について，(1) の結果を適用して

$$I_n=\frac{1}{n}\int_0^n h(x)\,dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi} h(x)\,dx = \frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi} h(x)\,dx$$

$$I_n=\frac{1}{n}\int_0^n h(x)\,dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi} h(x)\,dx = \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi} h(x)\,dx$$

よって $\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$

(3) $m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ より，$n\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であるから

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{(m+1)\pi}=\frac{1}{\pi},\quad \lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{m\pi}=\frac{1}{\pi}$$

上式および (2) の結果から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \qquad (*)$$

$\cos x = t$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

x	$0 \longrightarrow \pi$
t	$1 \longrightarrow -1$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \qquad (**)$$

$t = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

t	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\,\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

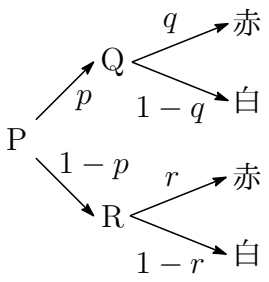
$(*)$，$(**)$ および上式から

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}}$$

■

3 (1) 3枚のコインP，Q，Rを投げる事象は独立である．コインPがn回とも表が出て，コインQはn回のうち丁度k回表が出る確率であるから

$$\boldsymbol{p^n \cdot {}_n\mathrm{C}_k q^k (1-q)^{n-k}}$$



(2) 上の図から，1回の試行で赤玉が出る確率は

$$pq + (1-p)r \qquad (*)$$

求める確率は，n回とも赤玉である確率であるから

$$\boldsymbol{\{pq + (1-p)r\}^n}$$

(3) $p = \dfrac{1}{2},\ q = \dfrac{1}{2},\ r = \dfrac{1}{5}$ のとき，$(*)$ の確率をsとすると

$$s = pq + (1-p)r = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

n回の試行により，つぼの中に赤玉がk個入る確率を

$$P_k = {}_n\mathrm{C}_k s^k (1-s)^{n-k}$$

とおくと $(0 \leqq k \leqq n)$

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k}\cdot\frac{s^{k+1}(1-s)^{n-k-1}}{s^k(1-s)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{s}{1-s} = \frac{7(2004-k)}{13(k+1)}$$

上式から

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = \frac{7(2004-k)}{13(k+1)} - 1 = \frac{7(2004-k) - 13(k+1)}{13(k+1)} = \frac{5(2803-4k)}{13(k+1)}$$

$2803 - 4k > 0$，すなわち，$k \leqq 700$ のとき　$P_k < P_{k+1}$
$2803 - 4k < 0$，すなわち，$k \geqq 701$ のとき　$P_k > P_{k+1}$

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{700} < P_{701} > P_{702} > \cdots > P_{2004}$$

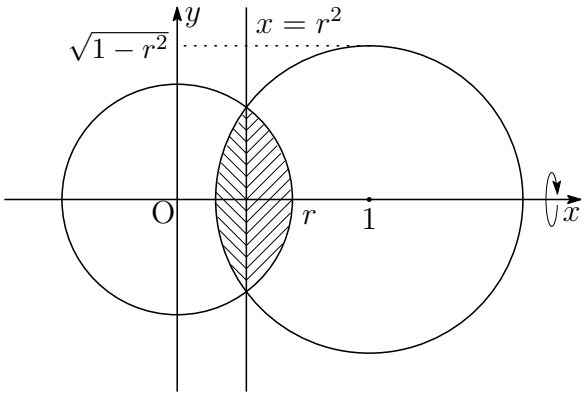
したがって，$k = 701$ で最大．よって，求める赤玉の個数は　**701個**　■

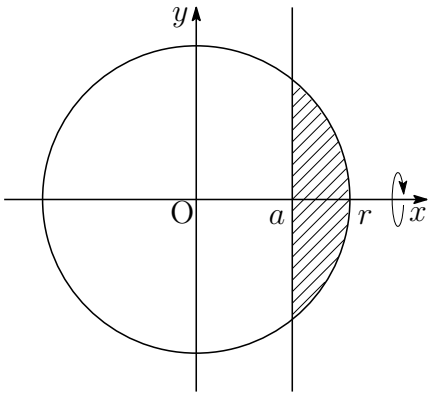
4 (1) 2 つの円 $x^2+y^2=r^2$，$(x-1)^2+y^2=1-r^2$ の方程式の辺々を引くと

$$2x-1=2r^2-1 \quad \text{これを解いて} \quad x=r^2$$

原点を中心とする半径 r と直線 $x=a$ で囲まれた右下の図の斜線部分を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を $V_r(a)$ とすると $(|a|<r)$

$$V_r(a)=\pi\int_a^r (r^2-x^2)\,dx=\left[\,r^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_a^r=\frac{\pi}{3}(2r^3-3r^2a+a^3)$$





$s=\sqrt{1-r^2}$ とおくと，上の結果から

$$\begin{aligned}V(r)&=V_r(r^2)+V_s(s^2)\\&=\frac{\pi}{3}(2r^3-3r^4+r^6)+\frac{\pi}{3}(2s^3-3s^4+s^6)\\&=\frac{\pi}{3}\{2(r^3+s^3)-3(r^4+s^4)+r^6+s^6\}\end{aligned}$$

$r^2+s^2=1$ に注意すると

$$\begin{aligned}&r^3+s^3=(r+s)(r^2+s^2-rs)=(r+s)(1-rs),\\&r^4+s^4=(r^2+s^2)-2r^2s^2=1-2r^2s^2,\\&r^6+s^6=(r^2+s^2)^3-3r^2s^2(r^2+s^2)=1-3r^2s^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}V(r)&=\frac{\pi}{3}\{2(r+s)(1-rs)-3(1-2r^2s^2)+1-3r^2s^2\}\\&=\frac{\pi}{3}\{2(1-r^2)s+2r-2rs^2+3r^2s^2-2\}\qquad(*)\\&=\frac{\pi}{3}\{2(1-r^2)\sqrt{1-r^2}+2r-2r(1-r^2)+3r^2(1-r^2)-2\}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}\{2(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+3r^2+2r^3-3r^4-2\}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を微分すると

$$\begin{aligned}
V'(r) &= \frac{\pi}{3}\{-6r(1-r^2)^{\frac{1}{2}} + 6r + 6r^2 - 12r^3\} \\
&= 2\pi r\{-2r^2 + r + 1 - (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\} \\
&= 2\pi r\{(1+2r)(1-r) - \sqrt{1-r^2}\} \\
&= 2\pi r\sqrt{1-r}\{(1+2r)\sqrt{1-r} - \sqrt{1+r}\} \\
&= \frac{2\pi r\sqrt{1-r}\{(1+2r)^2(1-r) - (1+r)\}}{(1+2r)\sqrt{1-r} + \sqrt{1+r}} \\
&= \frac{4\pi r^2(1-2r^2)\sqrt{1-r}}{(1+2r)\sqrt{1-r} + \sqrt{1+r}}
\end{aligned}$$

r	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

よって，$\boldsymbol{r = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}\right)}$

解説 前ページの $(*)$ および $r^2 + s^2 = 1$ から，$r,\ s$ の対称式であるから，$r = s$，すなわち，$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で極値をとることが知られている．

$r^2 + s^2 = 1$ を r で微分すると，$2r + 2s\frac{ds}{dr} = 0$ であるから，$(*)$ から

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\pi}V'(r) &= (2 - 4rs - 2s^2 + 6rs^2) + (2 - 2r^2 - 4rs + 6r^2s)\frac{ds}{dr} \\
&= (2 - 4rs - 2s^2 + 6rs^2) + (2 - 2r^2 - 4rs + 6r^2s)\left(-\frac{r}{s}\right) \\
&= 6r(r-s)(1-r-s)
\end{aligned}$$

$1 - r - s = 0$ とすると，$(r,\ s) = (1,\ 0),\ (0,\ 1)$ となり，不適．
したがって，$r = s$ で極値をとる．

$$\begin{aligned}
r(r-s)(1-r-s) &= rs^2 - r^3 - rs + r^2 = r(1-r^2) - r^3 - rs + r^2 \\
&= -2r^3 + r^2 + r - rs
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi}V''(r) = 2\left(-6r^2 + 2r + 1 - s - r\frac{ds}{dr}\right) = 2\left(-6r^2 + 2r - s + \frac{r^2}{s}\right)$$

$r = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で，$\frac{1}{\pi}V''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(\sqrt{2} - 3) < 0$ より，極大値をとる． ■