平成 15 年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工　数 I・II・III・A・B・C　平成 15 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 (1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを C とする．原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ．

(2) (1) で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする．C と l_1 が囲む部分の面積を S_1，C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく．この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

2 2 辺の長さの比が $1 : a\ (a>1)$ の長方形がある．この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る．残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの操作を続ける．例えば，$a=3,\ a=\dfrac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる．

(1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ．

(2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ．

3 △ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする．辺 AB を $x : 1-x\ (0 \leqq x < 1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y : 1-y\ (0 \leqq y < 1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする．このとき，R が △AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ．(ただし，辺 AB，辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする．)

4 関数 $f_n(x)\ (n=1,2,\ldots)$ を次の漸化式により定める．

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$$

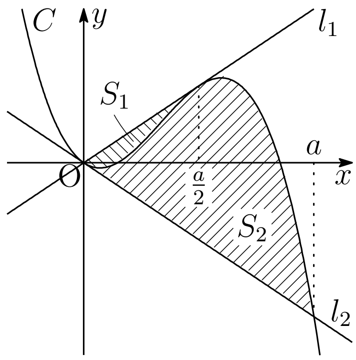
ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す．

(1) $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ．

(2) $f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ とおくと $(a>0)$



$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

$C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

これが原点 O を通るから　$-f(t)+tf'(t)=0$

$$-(-t^3+at^2+bt)+t(-3t^2+2at+b)=0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2(2t-a)=0$$

接点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{a}{2}$　接線の傾きは　$f'(0)=b$，$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}+b$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=bx,\quad y=\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)x}$

(2) $a>0$，$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)>f'(0)$ より　$l_1: y=\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)x,\quad l_2: y=bx$

C と l_2 を連立すると　$-x^3+ax^2+bx=bx$

$$x^2(x-a)=0 \quad \text{共有点の } x \text{ 座標は} \quad x=0,\ a$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{\frac{a}{2}}\left\{\left(\frac{a^2}{4}+b\right)x-(-x^3+ax^2+bx)\right\}dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} x\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 dx = \frac{1!2!}{4!}\left(\frac{a}{2}-0\right)^4 = \frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^4, \\
S_2 &= \int_0^a \{(-x^3+ax^2+bx)-bx\}\,dx \\
&= \int_0^a x^2(a-x)\,dx = \frac{2!1!}{4!}(a-0)^4 = \frac{1}{12}a^4
\end{aligned}$$

よって　　$S_1 : S_2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^4 : a^4 = \boldsymbol{1 : 16}$

補足 次の公式[1]を利用している．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

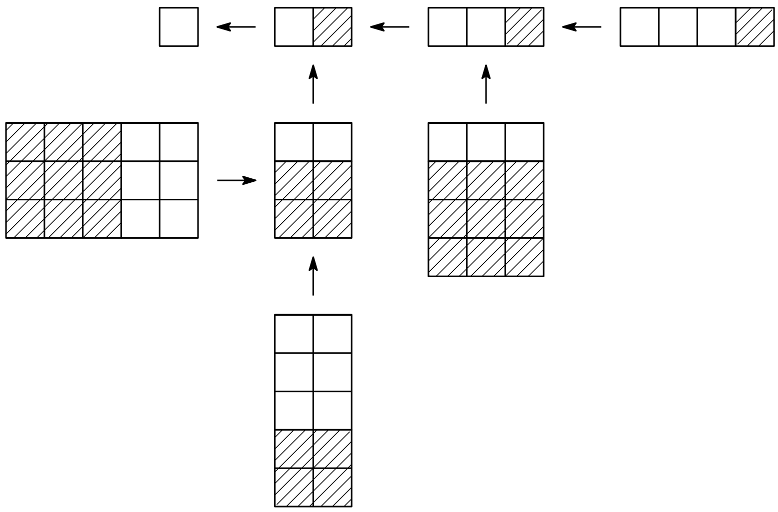
■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 下の図から，3 回でこの操作が終わる長方形の辺の比は次の 4 通り．

$$4:1,\quad 3:4,\quad 2:5,\quad 5:3$$

よって，求める a の値は　$\boldsymbol{a = 4,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{3}}$



補足 n 回の操作で終わる個数は 2^{n-1}．上の矢印を逆に辿ると分かりやすい．

(2) n 回の操作で終わる a の値の集合を A_n とすると　$A_1 = \{2\}$

$$a \in A_n \implies a+1 \in A_{n+1},\ \frac{1}{a}+1 \in A_{n+1}$$

A_n の最大の要素を a_n とすると，$a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1}+1$ より

$$a_n = 2 + 1(n-1) = n+1$$

A_n の最小の要素を b_n とすると，$b_n = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$

$$b_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

n 回の操作で終わるような a の値の最大値は $\boldsymbol{n+1}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{n+1}{n}}$ ■

3 $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ のとき，△ABQ と直線 CP についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{CA}} = 1 \quad ゆえに \quad \frac{x}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{1-y}{1} = 1$$

$\mathrm{BR} : \mathrm{RQ} = 1-x : x(1-y)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-x+x(1-y)} = \frac{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-x)y\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1-xy} \qquad (*)$$

$(*)$ は，$xy = 0$ のときも成立するから，$(*)$ は $0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ について成立する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{2x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{2y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

R が △AMN に含まれるとき，次を満たせばよい．

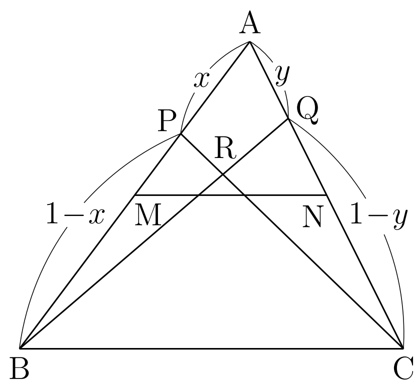
$$\frac{2x(1-y)}{1-xy} \geqq 0, \quad \frac{2y(1-x)}{1-xy} \geqq 0, \quad \frac{2x(1-y)}{1-xy} + \frac{2y(1-x)}{1-xy} \leqq 1$$

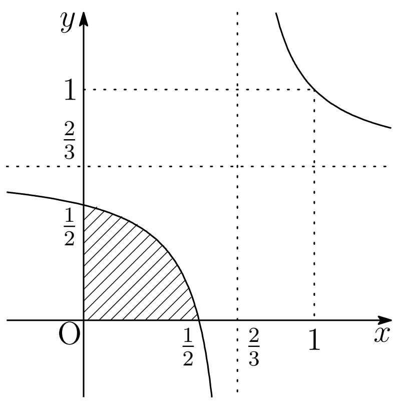
$0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ より，上の第 1 式と第 2 式は満たすから，第 3 式より

$$2x(1-y) + 2y(1-x) \leqq 1 - xy \quad すなわち \quad (3x-2)(3y-2) \geqq 1$$

$(x,\ y)$ の満たす条件は　$0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1,\ (3x-2)(3y-2) \geqq 1$

よって，その満たす領域は，右下の図の斜線部分で境界線を含む．





その面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9x-6}\right) dx = \left[\,\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\log|9x-6|\,\right]_0^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\log 2}$

■

$\boxed{4}$ (1) 「$f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式である」を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき，$f_1(x)=x^2$ より，(A) が成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$f_k^{(2)}(x)$ の次数は

$$(k+1)-2=k-1$$

$x^3f_k^{(2)}$ の次数は　$(k-1)+3=k+2$

$f_k(x)+x^3f_k^{(2)}(x)$ は，$(k+1)$ 次式と $(k+2)$ 次式の和であるから

$$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3f_k^{(2)}(x)$$

は $(k+2)$ 次式で，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

$f_n(x)$ の $n+1$ 次の項の係数を A_n とすると，漸化式より

$$\begin{cases} A_1x^2=x^2 \\ A_{n+1}x^{n+2}=x^3(A_nx^{n+1})^{(2)} \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} A_1=1 \\ A_{n+1}=(n+1)nA_n \end{cases}$$

$n>1$ のとき，$(*)$ より　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{A_{k+1}}{A_k}=\prod_{k=1}^{n-1}k(k+1)$

$$\frac{A_n}{A_1}=\prod_{k=1}^{n-1}k\prod_{k=1}^{n-1}(k+1)=(n-1)!n!$$

$$A_n=A_1(n-1)!n!=(n-1)!n!$$

上の結果は，$n=1$ のときも成立するから，求める x^{n+1} の係数は

$$\boldsymbol{(n-1)!n!}$$

(2) 漸化式より，$f_n(x)$ の最低次の項は x^2 であるから

$$f_n(x)=x^2+a_nx^3+b_nx^4+\cdots$$

とおくと，与えられた漸化式 $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$ より

$$\begin{aligned} x^2+a_{n+1}x^3+b_{n+1}x^4+\cdots &= x^2+a_nx^3+b_nx^4+\cdots \\ &\qquad +x^3(x^2+a_nx^3+b_nx^4+\cdots)^{(2)} \\ &= x^2+(a_n+2)x^3+(b_n+6a_n)x^4+\cdots \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$a_{n+1}=a_n+2,\quad b_{n+1}=b_n+6a_n \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式および $a_1 = 0$ から，$\{a_n\}$ は初項 0，公差 2 の等差数列．

$$a_n = 0 + 2(n-1) = 2(n-1)$$

これと $(**)$ の第 2 式から　$b_{n+1} - b_n = 6{\cdot}2(n-1)$

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = 6\sum_{k=1}^{n-1} 2(k-1)$

$$b_n - b_1 = 6\sum_{k=1}^{n-1}\{k(k-1) - (k-1)(k-2)\}$$

$b_1 = 0$ であるから　　$b_n = 6(n-1)(n-2)$

上式は，$n = 1$ のときも成立する．以上の結果から

$$f_n(x) = x^2 + 2(n-1)x^3 + 6(n-1)(n-2)x^4 + \cdots$$

したがって

$$\begin{aligned}
&f_n^{(1)}(0) = \mathbf{0},\\
&f_n^{(2)}(0) = (x^2)^{(2)} = \mathbf{2},\\
&f_n^{(3)}(0) = \{2(n-1)x^3\}^{(3)} = \boldsymbol{12(n-1)},\\
&f_n^{(4)}(0) = \{6n(n-1)x^4\}^{(4)} = \boldsymbol{144(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

■