平成14年度　東京工業大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・生命理工　数I・II・III・A・B・C　平成14年2月25日

問題 [1] [2] [3] [4]

[1] 実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-a\cos x|\,dx$$

を考える．$f(a)$ の最小値を求めよ．

[2] 楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた2本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ．

[3] 空間内にある一辺の長さが1の正三角形 ABC で，A の座標が $(0,\ 0,\ 1)$ であり，B と C の z 座標が等しいものを考える．点 $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ．

[4] n を自然数とする．

(1) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

(2) 関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする．このとき

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$$

および $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ．

(3) (2) の x_n に対して，極限

$$\lim_{n\to\infty}x_n\log n$$

を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $a=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad \sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\sin x-a\cos x=\sqrt{1+a^2}\sin(x-\theta)$$

(i) $a<0$，すなわち，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin(x-\theta)|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x-\theta)\,dx\\&=\Big[-\cos(x-\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\cos\theta\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{aligned}$$

したがって　$f(a)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(ii) $0\leqq a\leqq 1$，すなわち，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin(x-\theta)|\,dx\\&=-\int_0^{\theta}\sin(x-\theta)\,dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{4}}\sin(x-\theta)\,dx\\&=\Big[\cos(x-\theta)\Big]_0^{\theta}-\Big[\cos(x-\theta)\Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}}\\&=-\cos\theta+2-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\&=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\theta+2-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{aligned}$$

したがって　$f(a)=-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{1+a^2}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(iii) $1<a$，すなわち，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin(x-\theta)|\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x-\theta)\,dx$$

(i) の結果を利用して　$f(a)=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(i) の結果より，$a<0$ で単調減少，(iii) の結果より，$1<a$ で単調増加．

開区間における単調増加・単調減少する関数は最大値・最小値をとらない．

(ii) の結果より，$0 \leqq a \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a - \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2(1+a^2)}} \\ &= \frac{(2\sqrt{2}a)^2 - (1+a^2)}{\sqrt{2(1+a^2)}(2\sqrt{2}a + \sqrt{1+a^2})} \\ &= \frac{7a^2-1}{\sqrt{2(1+a^2)}(2\sqrt{2}a + \sqrt{1+a^2})} \end{aligned}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$　■

$\boxed{2}$ 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から楕円 C に接する直線を $\ell : y = m(x-a)+b$ とおき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{17} + \frac{1}{8}\{mx + (b-ma)\}^2 = 1$$

x について整理すると

$$\left(m^2 + \frac{8}{17}\right)x^2 + 2m(b-ma)x + (b-ma)^2 - 8 = 0 \qquad (*)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，係数について

$$D/4 = m^2(b-ma)^2 - \left(m^2 + \frac{8}{17}\right)\{(b-ma)^2 - 8\} = 0$$

したがって　$-\dfrac{8}{17}(b-ma)^2 + 8m^2 + \dfrac{64}{17} = 0$

m について整理すると　$(a^2-17)m^2 - 2abm + b^2 - 8 = 0 \quad \cdots (**)$

$a^2-17 \neq 0$ のとき，2 次方程式 $(**)$ の 2 解 $m_1,\ m_2$ について，その 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1m_2 = \frac{b^2-8}{a^2-17} = -1 \quad ゆえに \quad a^2+b^2 = 25$$

$a^2-17=0$，すなわち，$(\pm\sqrt{17},\ \pm\sqrt{8})$ (複号任意) から楕円 $\dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ にひいた 2 本の接線も直交するから，求める点 P の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2=25}$

補足 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から楕円 $C:\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ に接する直線を $\ell: y=m(x-a)+b$ とおき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{1}{q^2}\{mx+(b-ma)\}^2=1$$

x について整理すると

$$\left(m^2+\frac{q^2}{p^2}\right)x^2+2m(b-ma)x+(b-ma)^2-q^2=0 \qquad (*)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，係数について

$$D/4=m^2(b-ma)^2-\left(m^2+\frac{q^2}{p^2}\right)\{(b-ma)^2-q^2\}=0$$

したがって　　$-\dfrac{q^2}{p^2}(b-ma)^2+q^2m^2+\dfrac{q^4}{p^2}=0$

m について整理すると　$(a^2-p^2)m^2-2abm+b^2-q^2=0 \quad \cdots(**)$

$a^2-p^2\neq 0$ のとき，2 次方程式 $(**)$ の 2 解 $m_1,\ m_2$ について，その 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1m_2=\frac{b^2-q^2}{a^2-p^2}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2=p^2+q^2$$

$a^2-p^2=0$，すなわち，$(\pm p,\ \pm q)$ (複号任意) から楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ にひいた 2 本の接線も直交する．よって，点 P の軌跡の方程式は

$$x^2+y^2=p^2+q^2$$

補足 楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{p^2}=1$ の直交する 2 本の接線の交点の軌跡である円 $x^2+y^2=p^2+q^2$ を楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{p^2}=1$ の**準円**という． ■

3 辺 BC の中点を $\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$ とし $(0<\theta<\pi)$，直線 LM と xy 平面の交点を $\mathrm{M}'(0,\ t,\ 0)$ とすると，M は直線 $\mathrm{LM}' : x=0,\ \dfrac{y}{t}+\dfrac{z}{1+\sqrt{2}}=1$ 上の点であるから

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{t}+\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}{1+\sqrt{2}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{t}=\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}{1+\sqrt{2}}$$

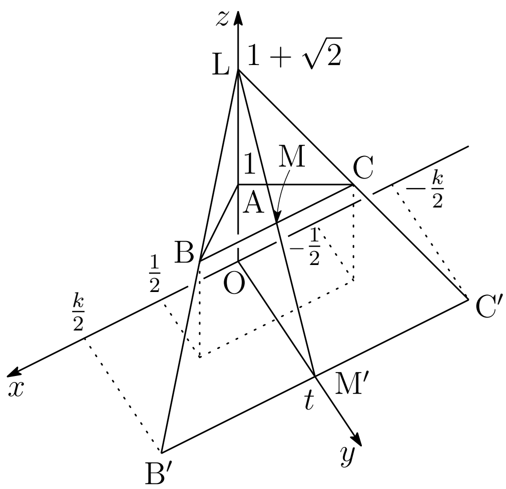
上の第 2 式の $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ t$ は，それぞれ M, M$'$ の y 座標であるから

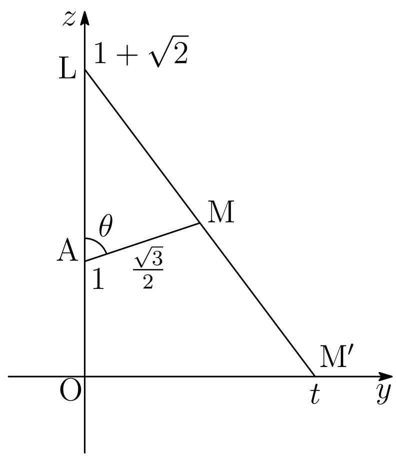
$$k=\frac{\mathrm{LM}'}{\mathrm{LM}}=\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$$

とおく．2 直線 LB，LC の xy 平面との交点をそれぞれ B$'$, C$'$ とすると，△LBC と △LB$'$C$'$ は相似で，その相似比は $1:k$ である．

$\mathrm{BC}=1$ であるから　$\mathrm{B'C'}=k$　また　$\mathrm{OM'}=t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k\sin\theta$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OB'C'}&=\frac{1}{2}\mathrm{B'C'}\cdot\mathrm{OM'}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\right)^2\sin\theta\\&=\frac{\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})\sin\theta}{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta\right)^2}=\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^{-2}\sin\theta \qquad (*)\end{aligned}$$





$f(\theta)=(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^{-2}\sin\theta$ とおくと $(0<\theta<\pi)$

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-2\sqrt{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^{-3}\sin^2\theta+(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^{-2}\cos\theta\\&=\frac{-2\sqrt{3}\sin^2\theta+(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)\cos\theta}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^3}\\&=\frac{\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta-2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^3}=\frac{(\cos\theta+\sqrt{6})(\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta)^3}\end{aligned}$$

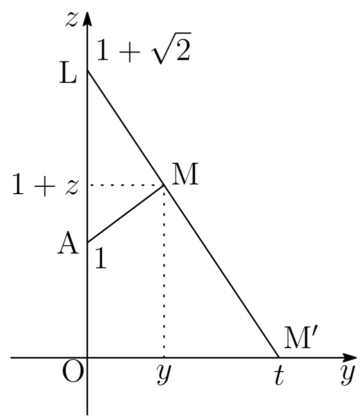
$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ とおくと $(0<\varphi<\pi)$　$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

θ	(0)	$\cdots$	φ	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\searrow$	

上の結果と $(*)$ により，求める最大値は

$$\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$$

解説 $\mathrm{M}(0,\ y,\ 1+z)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ y,\ 1+z\right)$ とおくと $(y>0)$



$$\frac{\mathrm{LM'}}{\mathrm{LM}}=\frac{t}{y}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-z},$$
$$\mathrm{AB}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=1\quad\cdots①$$

$\mathrm{OM'}=t$，$\mathrm{B'C'}=\dfrac{t}{y}\mathrm{BC}=\dfrac{t}{y}$ より

$$\triangle\mathrm{OB'C'}=\frac{1}{2}\mathrm{OM'}\cdot\mathrm{B'C'}=\frac{t^2}{2y}$$

$t=\dfrac{(1+\sqrt{2})y}{\sqrt{2}-z}$ より　$\triangle\mathrm{OB'C'}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{y}{(\sqrt{2}-z)^2}\quad\cdots②$

①，② より，$y^2+z^2=\dfrac{3}{4}\ (y>0)$ における $\dfrac{y}{(\sqrt{2}-z)^2}$ の最大値を求めればよい．

$\vec{p}=(y,\ z)$ を θ を媒介変数とする正則曲線を考え，

$$\vec{v}=(y',\ z')=\left(\frac{dy}{d\theta},\ \frac{dz}{d\theta}\right)$$

をその接ベクトルとする．$y^2+z^2=\dfrac{3}{4}$ を θ で微分すると

$$2yy'+2zz'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{p}\cdot\vec{v}=0$$

関数 $g(\theta)=\dfrac{y}{(\sqrt{2}-z)^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(\theta)&=\frac{y'}{(\sqrt{2}-z)^2}+\frac{2yz'}{(\sqrt{2}-z)^3}=\frac{1}{(\sqrt{2}-z)^3}(\sqrt{2}-z,\ 2y)\cdot(y',\ z')\\ &=\frac{1}{(\sqrt{2}-z)^3}(\sqrt{2}-z,\ 2y)\cdot\vec{v} \qquad (*) \end{aligned}$$

$\vec{q}=(\sqrt{2}-z,\ 2y)$ とすると，$g(\theta)$ が極値をとるとき

$$\vec{q}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{p}/\!/\vec{q}$$

$\vec{p}=(y,\ z),\ \vec{q}=(\sqrt{2}-z,\ 2y)$ より　$2y^2-z(\sqrt{2}-z)=0$

$$z^2+\sqrt{2}z-\frac{3}{2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$y^2+z^2=\dfrac{3}{4}$ に注意して　$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$y>0$ より　$y=\dfrac{1}{2}$

このとき，$g(\theta)$ は極値 1 をとるが，これが極大値であることを以下に示す．

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$ とし，次を満たす φ をとる．

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \quad \text{すなわち} \quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$(*)$ より　$(2-z)^3g'(\theta)=(\sqrt{2}-z)y'+2yz'=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta-\dfrac{3}{4}\cos^2\theta-\dfrac{3}{2}\sin^2\theta$

これを θ で微分すると

$$\{(2-z)^3\}'g'(\theta)+(2-z)^3g''(\theta)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$g'(\varphi)=0$ および上式の右辺は負より，$g''(\varphi)<0$ となり，$g(\varphi)$ は極大値．　■

$\boxed{4}$ (1) k を自然数とすると $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{k}$

$$\frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}$$

自然数 $n>1$ について

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおくと　　$S_n-1<\log n<S_n-\dfrac{1}{n}$

$(*)$ $\log n+\dfrac{1}{n}<S_n<\log n+1$　ゆえに　$1+\dfrac{1}{n\log n}<\dfrac{S_n}{\log n}<1+\dfrac{1}{\log n}$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)=1$

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log n}=1 \quad すなわち \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$$

(2) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ とおくと

$$f(k)=f(k+1)=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

したがって，ロルの定理により

$$f'(x_{n-k})=0,\quad k<x_{n-k}<k+1,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

を満たす x_{n-k} が存在する．$f'(x)$ は n 次多項式であるから，x_{n-k} は $f'(x)=0$ の解であり，$f(x)$ の極値を与える x である．
また，x_n $(0<x_n<1)$ は，$f(x)$ の極値を与える x の最小値である．
$x\neq k$ のとき $(k=0,1,2,\cdots,n)$

$$f'(x)=f(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$$

$f'(x_n)=0$，$f(x_n)\neq 0$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_n-k}=0 \qquad ゆえに \qquad \frac{1}{x_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$　$\cdots(**)$

$0 < x_n < 1$ であるから，$(**)$ より $\quad \dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{1-x_n}$

$$0 < x_n < 1 - x_n \quad \text{ゆえに} \quad 0 < x_n < \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad 0 < x_n \leqq \frac{1}{2}$$

(3) $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$ より，$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n} &> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n, \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n} &= \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k - x_n} \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = 2 + S_n - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{x_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$ であるから $\quad S_n < \dfrac{1}{x_n} < 2 + S_n - \dfrac{1}{n} < 2 + S_n$

$(*)$ より $\quad \log n + \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{x_n} < 2 + (\log n + 1)$

$$1 + \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{x_n \log n} < 1 + \frac{3}{\log n}$$

このとき $\quad \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{\log n}\right) = 1$

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n \log n} = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n \to \infty} x_n \log n = 1}$$

補足 $(*)$ の不等式

$$\log n + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n + 1$$

に関連して，次の等式が知られている．

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant)$\gamma \fallingdotseq 0.577215665 \cdots$ である [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf (p.17)