

令和7年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
 経済(理系), 理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農

問題 1 2 3 4 5 6

1 原点を出発点として数直線上を動く点Pがある. 試行(*)を次のように定める.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 枚の硬貨を1回投げて,} \\ \bullet \text{ 表が出た場合は点Pを正の向きに1だけ進める.} \\ \bullet \text{ 裏が出た場合は1個のさいころを1回投げ,} \\ \quad \text{奇数の目が出た場合は点Pを正の向きに1だけ進め,} \\ \quad \text{偶数の目が出た場合は点Pを負の向きに2だけ進める.} \end{array} \right.$$

ただし, 硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$, さいころを投げたとき1から6までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 試行(*)を3回繰り返したとき, 点Pが原点にもどっている確率を求めよ.
- (2) 試行(*)を6回繰り返したとき, 点Pが原点にもどっている確率を求めよ.
- (3) n を3で割り切れない正の整数とする. 試行(*)を n 回繰り返したとき, 点Pが原点にもどっている確率を求めよ.

2 正の実数からなる2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次のように定める.

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) k を実数とする. $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく. このとき, 数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ.

3 a を実数とし, 関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ.
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ.

- 4 n を正の整数, a を正の実数とし, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち, その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ.
- (3) (2) で求めた S_n に対し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

- 5 S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする. また, 点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする. 点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ.
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする. 直線 m と球面 S の交点のうち, 点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ.
- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り, ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える. 点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき, 点 Q は xy 平面上の円周を動くことを示せ.

- 6 1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) K の対角線の長さを求めよ.
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする. また, P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする. P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする. θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲で動くとき, ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ.

解答例

- 1** 1回の試行(*)で点Pは数直線上を正の向きに1または負の向きに-2だけ進む. それぞれの事象を A, B とし, その確率を $p = P(A), q = P(B)$ とすると

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

- (1) 3回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = 3, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2, \quad y = 1$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{3!}{2!1!} p^2 q = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

- (2) 6回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = 6, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 4, \quad y = 2$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{6!}{4!2!} p^2 q = 15 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1215}{4096}$$

- (3) n 回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = n, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2n}{3}, \quad y = \frac{n}{3}$$

n は3で割り切れない正の整数であるから, x, y が0以上の整数であることに反する. よって, 求める確率は **0** ■

- 2** (1) 正の実数からなる2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

を満たすから, $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおくと

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1, \quad a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 6b_n$$

k を実数とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= 5a_n + 2b_n + k(a_n + 6b_n) \\ &= (5+k)a_n + (2+6k)b_n \end{aligned} \quad (*)$$

したがって $1 : k = (5+k) : (2+6k)$

$$k(5+k) = 2+6k \quad \text{整理すると} \quad k^2 - k - 2 = 0$$

ゆえに $(k+1)(k-2) = 0$ これを解いて $k = -1, 2$

$k = -1, 2$ を $(*)$ にそれぞれ代入すると

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n), \quad a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n) \quad (**)$$

数列 $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n + 2b_n\}$ は公比がそれぞれ 4, 7 の等比数列である.

よって $k = -1, 2$

- (2) $(**)$ より

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= (a_1 - b_1) \cdot 4^{n-1} = \{1 - (-1)\} \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}, \\ a_n + 2b_n &= (a_1 + 2b_1) \cdot 7^{n-1} = \{1 + 2(-1)\} \cdot 7^{n-1} = -7^{n-1} \end{aligned}$$

上の2式から b_n を消去すると $a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$

$$x_n = 2^{a_n} \text{ であるから } x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$$



3 (1) $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x \\ &= 2x(2x^2 + 2ax + a+2) \end{aligned}$$

$g(x) = 2x^2 + 2ax + a+2$ とし, その係数について

$$D/4 = a^2 - 2(a+2) = a^2 - 2a - 2$$

とおく. $f(x)$ が極大値をもつ条件は

(*) 「 $f'(x)$ の符号が正から負になる x が存在する」

ことである.

(i) $D \leq 0$ のとき, $f'(x) = 2xg(x)$, $g(x) \geq 0$ より, 条件(*) を満たさない.

(ii) $g(0) = 0$, すなわち, $a = -2$ のとき $f'(x) = 4x^2(x-2)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{これを解くと} \quad x = 0, 4$$

これらの x の値は, (*) を満たさない.

(iii) $D > 0$ かつ $a \neq -2$, すなわち,

$a < -2$, $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$ のとき, $f'(x) = 0$ は, 異なる 3 つの実数解をもち, それらを $x_1 < x_2 < x_3$ とすると

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき, $f(x)$ は極大値をもつ.

(i)~(iii) より $a < -2$, $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$

(2) (1)(iii) の増減表で $x_2 = 0$ であるから, $g(x) = 0$ の解が x_1, x_3 となる, すなわち, $x_1 < 0 < x_3$ となる条件は

$$g(0) = a + 2 < 0 \quad \text{よって} \quad a < -2$$



- 4 (1) $f(x) = n \log x$, $g(x) = ax^n$ より $f'(x) = \frac{n}{x}$, $g'(x) = anx^{n-1}$
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点の x 座標を $x = t$ とすると,
 $f(t) = g(t)$, $f'(t) = g'(t)$ より

$$(*) \begin{cases} n \log t = at^n \\ \frac{n}{t} = ant^{n-1} \end{cases} \quad (*) \text{ の第 2 式から } at^n = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

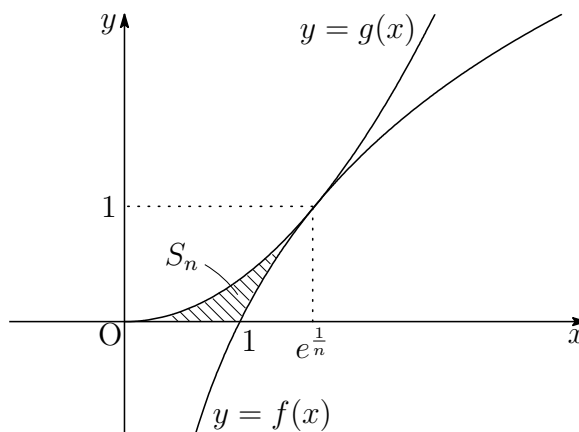
① を (*) の第 1 式に代入すると

$$n \log t = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = e^{\frac{1}{n}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると $ae = 1$ よって $a = \frac{1}{e}$

- (2) (1) の結果から, S_n は下の図の斜線部分の面積である.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} g(x) dx - \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} f(x) dx = \frac{1}{e} \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} x^n dx - n \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} \log x dx \\ &= \frac{1}{(n+1)e} \left[x^{n+1} \right]_0^{e^{\frac{1}{n}}} - n \left[x(\log x - 1) \right]_1^{e^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n+1} e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - e^{\frac{1}{n}} \quad (**) \\ &= \frac{n^2}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - n \end{aligned}$$



- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$
 これを (**) に利用すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - e^{\frac{1}{n}} \right\} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

補足 1 と n 個の $1 + \frac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1} \left\{ 1 + n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} > \sqrt[n+1]{1 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ とすると, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である.

また, 1 と $n+1$ 個の $\frac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2} \left\{ 1 + (n+1) \cdot \frac{n}{n+1} \right\} > \sqrt[n+2]{1 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ とすると, 数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である. したがって

$$2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 = 4$$

また, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right) a_n$ であるから $0 < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$

はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

この極限值をネイピア数といい, e ($\doteq 2.71828 \cdots$) で表す.

以上の結果より, $n \geq 2$ とすると, $a_n < e < b_{n-1}$ であるから

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n \quad \text{ゆえに} \quad 1 < n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) < \frac{n}{n-1}$$

上の第2式から, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$ ■

- 5** (1) S 上の z 座標が 1 となる点は、点 N に限るから、点 N と異なる点 $P(a, b, c)$ の z 座標について

$$c \neq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - c \neq 0$$

直線 NP の方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{NP} \\ &= (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1) \end{aligned}$$

この直線は点 Q を通るから

$$\overrightarrow{OQ} = (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)$$

上式の z 座標について ($1 - c \neq 0$)

$$0 = 1 + t(c - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1 - c}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = (0, 0, 1) + \frac{1}{1 - c}(a, b, c - 1) = \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}, 0 \right)$$

$$\text{よって} \quad Q \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}, 0 \right)$$

- (2) (1) の結果を利用して

$$p = \frac{a}{1 - c}, \quad q = \frac{b}{1 - c} \quad (*)$$

とおくと、 $P(a, b, c)$ は S 上の点であるから $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

これから $a^2 + b^2 = 1 - c^2$ を利用すると

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= \left(\frac{a}{1 - c} \right)^2 + \left(\frac{b}{1 - c} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(1 - c)^2} \\ &= \frac{1 - c^2}{(1 - c)^2} = \frac{1 + c}{1 - c} = -1 + \frac{2}{1 - c} \end{aligned}$$

$$\text{上式から} \quad 1 - c = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1} \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$(*) \text{ より } \quad a = p(1 - c) = \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \quad b = 2q(1 - c) = \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

別解 $N(0, 0, 1)$, $P(a, b, c)$, $Q(p, q, 0)$ とする.

P は直線 NQ 上の点であるから, 実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{ON} + k\overrightarrow{NQ} \quad (P \neq N \text{ より, } k \neq 0) \\ &= (0, 0, 1) + k(p, q, -1) \\ &= (kp, kq, 1 - k)\end{aligned}$$

P は S 上の点であるから

$$(kp)^2 + (kq)^2 + (1 - k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k\{(p^2 + q^2 + 1)k - 2\} = 0$$

$$k \neq 0 \text{ より} \quad k = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

$$(3) \text{ 平面 } \alpha \text{ の方程式は} \quad 3(x - 0) + 4(y - 0) + 5\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 3x + 4y + 5z - \frac{5}{2} = 0$$

S 上の点 $P(a, b, c)$ が平面 α 上にあるとき

$$3a + 4b + 5c - \frac{5}{2} = 0 \quad (**)$$

直線 NP と xy 平面との交点を $Q(p, q, 0)$ とすると, (2) の結果から

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

これを (**) に代入すると

$$\frac{6p + 8q + 5(p^2 + q^2 - 1)}{p^2 + q^2 + 1} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{整理すると} \quad p^2 + q^2 + \frac{12}{5}p + \frac{16}{5}q - 3 = 0$$

$$\text{したがって, 点 } Q \text{ の軌跡の方程式は} \quad x^2 + y^2 + \frac{12}{5}x + \frac{16}{5}y - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = 7$$

よって, 点 Q の軌跡は中心 $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$, 半径 $\sqrt{7}$ の円である.

補足 S と共有点をもつ平面 α を

$$\alpha : \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \alpha_4$$

とし, S 上の点 $P(a, b, c)$, xy 平面上の点 $Q(p, q, 0)$ とすると

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

であり, $P(a, b, c)$ は α 上の点であるから

$$\frac{2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q + \alpha_3(p^2 + q^2 - 1)}{p^2 + q^2 + 1} = \alpha_4$$

整理すると

$$2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q - 2\alpha_3 = (\alpha_4 - \alpha_3)(p^2 + q^2 + 1)$$

(i) $\alpha_3 \neq \alpha_4$ のとき (α は N を通らない), 点 Q の軌跡の方程式は

$$\frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y - 2\alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} = x^2 + y^2 + 1$$

$$\text{すなわち } \text{円} : x^2 + y^2 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3}x - \frac{2\alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3}y + \frac{2\alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} + 1 = 0$$

本題では $\alpha : 3x + 4y + 5z = \frac{5}{2}$ であるから

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = \frac{5}{2}$$

を上式に代入すればよい.

(ii) $\alpha_3 = \alpha_4$ のとき (α は N を通る), 点 Q の軌跡は

$$\text{直線} : \alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_3$$

である. ■

(2) 下の図において, $x = \angle AOL$, $y = \angle BOM$ とする. $\alpha = \frac{\pi}{10}$ とおくと

$$\angle OAB = \angle OBA = 3\alpha, \quad \angle AOB = 4\alpha, \quad x + y = 2\alpha$$

$$P \text{ の外接円の半径を } R \text{ とすると } R \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$R = OA = OB = \frac{1}{2 \cos 3\alpha} = \frac{1}{2 \sin 2\alpha}$$

$\triangle OAL$, $\triangle OBM$ に正弦定理を適用すると

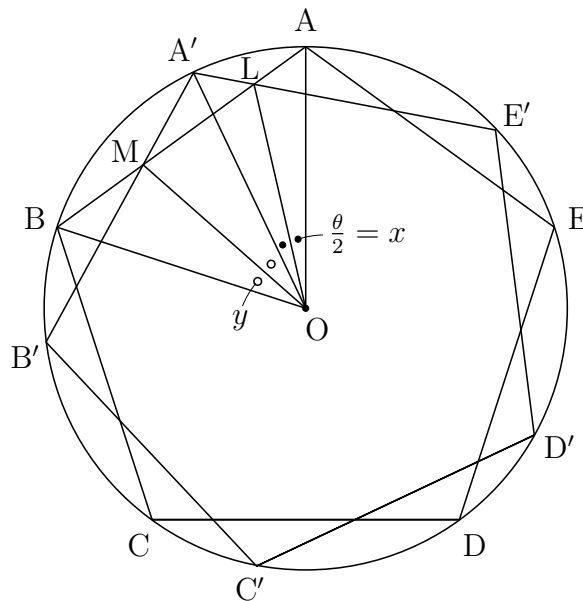
$$\frac{AL}{\sin x} = \frac{R}{\sin(3\alpha + x)}, \quad \frac{BM}{\sin y} = \frac{R}{\sin(3\alpha + y)}$$

$$3\alpha + x = 5\alpha - y = \frac{\pi}{2} - y, \quad 3\alpha + y = 5\alpha - x = \frac{\pi}{2} - x \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} AL + BM &= \frac{R \sin x}{\cos y} + \frac{R \sin y}{\cos x} \\ &= \frac{R(\sin x \cos x + \sin y \cos y)}{\cos x \cos y} = \frac{R(\sin 2x + \sin 2y)}{2 \cos x \cos y} \\ &= \frac{2R \sin(x+y) \cos(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2R \sin 2\alpha \cos(x-y)}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} \\ &= \frac{\cos(x-y)}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} = 1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\ell_\theta}{10} = LM &= AB - (AL + BM) \\ &= 1 - (AL + BM) = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x-y)} \end{aligned}$$



$$2\alpha = \frac{\pi}{5} \text{ であるから, (1) の結果から } \cos 2\alpha = \frac{s}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\ell_\theta = \frac{10 \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(x - y)}$$

よって, ℓ_θ は, $x - y = 0$, すなわち, $x = y = \alpha = \frac{\pi}{10}$ のとき

$$\text{最小値 } \frac{10 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + 1} = 2\sqrt{5}$$

をとる.

