令和６年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q > 0$ とする．

(1) p，q の値を a を用いて表せ．また，$p > q$ であることを示せ．

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

2 以下の問いに答えよ．

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする．正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b) $x \geqq 2 \log_t x$

をともに満たすとする．このとき，不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ．

(2) $n \leqq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．それぞれ A，A，B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える．この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る．作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする．また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする．これらの場合以外は可とする．たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である．作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく．

(1) p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ．また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ．

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ．

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ．ただし，i は虚数単位である．

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ．

4 xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,-1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0,-1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える．

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ．この交わりは円となる．この円を C とし，その中心を P_3 とする．C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ．

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする．xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ．また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ．

5 $x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく．必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0$ であることと，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい．

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け．ただし，(2) の α を用いてよい．グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする．このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

6 xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2+y^2=1$ および円板 $D : x^2+y^2 \leqq 1$ を考える．D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする．$\mathrm{A}(0, -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする．xyz 空間内の平面 $H : z = x$ を考える．すなわち，H は zx 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である．K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする．

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく．$r(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく．θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく．T を求めよ．必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C: y=(x)$ について，$f(x)=(x-a)^2+3a^2$ より，頂点 A は $(a,\ 3a^2)$
直線 OA の傾きは $3a$ であるから，その方程式は $y=3ax$
これと $C: y=x^2-2ax+4a^2$ から y を消去すると

$$x^2-2ax+4a^2=3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a)=0$$

点 P は点 A と異なるから，点 P の x 座標 p は $\boldsymbol{p=4a}$
$f'(x)=2x-2a$ より C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

すなわち $\quad y=2(q-a)x-q^2+4a^2$
これが原点を通るから $(q>0,\ a>0)$

$$-q^2+4a^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q=2a}$$

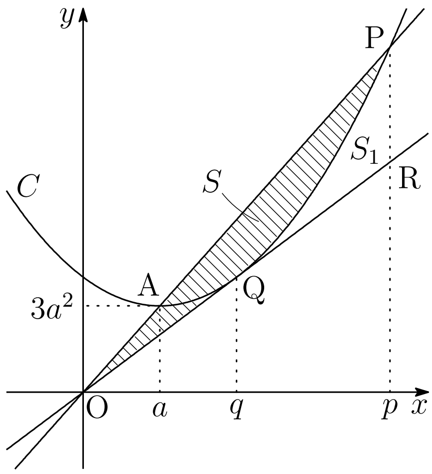
$p=4a,\ q=2a$ であるから $(a>0)$ $\quad p>q$

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線 $y=2ax$ および直線 $x=p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．このとき [1]

$$f(x)=f(q)+f'(q)(x-q)+(x-q)^2$$

であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x)-f(q)-f'(q)(x-q)\}\,dx \\ &= \int_q^p (x-q)^2\,dx = \frac{1}{3}(p-q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a-2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$



接線 OQ と直線 $x=p$ の交点を R とすると
$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{R}(4a,\ 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OPR}-S_1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4a(12a^2-8a^2)-\frac{8}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3) $S=\dfrac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると $\dfrac{16}{3}a^3=\dfrac{2}{3}$ これを解いて $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解 直線 $x=2a$ と直線 OP の交点を Q$'$ とすると　$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$，$\mathrm{Q}'(2a,\ 6a^2)$

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}p\cdot\mathrm{QQ}'=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a^2=4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は，1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p-q)^3=\frac{1}{6}(4a-2a)^3=\frac{4}{3}a^3$$

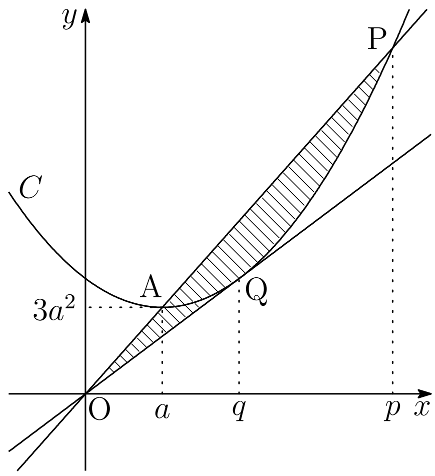
よって，求める面積は　$S=4a^3+\dfrac{4}{3}a^3=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}a^3}$

解説

$$\begin{aligned}xy'-y&=x(2x-2a)-(x^2-2ax+4a^2)\\&=(x-2a)^2+4a(x-2a)\end{aligned}$$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{4a}=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}\end{aligned}$$



補足 解説の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．このとき，積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる．例えば，C と線分 OQ，OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる．

$$\begin{aligned}S'&=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\,\Big]_{2a}^{a}=\frac{5}{6}a^3\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $x \geqq 2\log_t x$ より　$x+1 \geqq 2\log_t x + 1 = 2\log_t \sqrt{t}x$　$\cdots$①

$x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$ より $(t>1)$，$(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t}x > x+1 \quad \cdots ②$$

①，② から　　$x+1 > 2\log_t(x+1)$

(2) (1) の結論に $t=2$ を代入すると，$x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ のとき

$$x \geqq 2\log_2 x \quad \Longrightarrow \quad x+1 > 2\log_2(x+1)$$

これから，$x > \sqrt{2}+1$ のとき　$2^x \geqq x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^{x+1} > (x+1)^2 \quad \cdots(*)$

$(*)$ より，$2^N \geqq N^2$ $(N \geqq 3)$ を満たす自然数 N が存在するならば，$n > N$ であるすべての自然数 n について，次が成立する．

$$2^n > n^2$$

$n \leqq 2\log_2 n$ を変形すると　　$2^n \leqq n^2 \quad \cdots(**)$
したがって，$(**)$ を満たす n は $n \leqq N$ に限られる．
$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，2^n と n^2 の値を調べると，下の表から　$N=4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

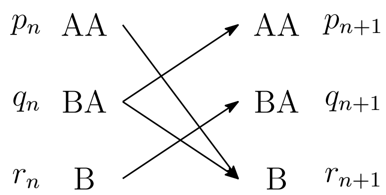
よって，$(**)$ を満たす n は　　$\boldsymbol{n = 2,\ 3,\ 4}$

■

3 (1) $p_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{9}},\quad q_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}},\quad r_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$

求める漸化式は，次のようになる．

$$\boldsymbol{p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n}$$
$$\boldsymbol{q_{n+1}=\frac{2}{3}r_n}$$
$$\boldsymbol{r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n}$$



(2) (1) の結果から

$$p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$$

数列 $\{p_n+2q_n+2r_n\}$ は $p_2+2q_2+2r_2=\frac{4}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n+2q_n+2r_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\boldsymbol{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=-\frac{1}{3}(1+i)\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$$

数列 $\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ は $p_2+iq_2-(1+i)r_2=\frac{2}{9}$，公比 $-\frac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\boldsymbol{\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}}$$

(4) (3) の結果についてその共役複素数を考えると

$$p_n-iq_n-(1-i)r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

上式と (3) の結果の辺々を加えると

$$\begin{aligned}2(p_n-r_n)&=\frac{2}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right\}\\&=\frac{4}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cos\frac{n-2}{4}\pi\end{aligned}$$

$p_n=q_n$ のとき，整数 k を用いて　$\frac{n-2}{4}\pi=\frac{2k-1}{2}\pi$　ゆえに　$n=4k$

よって，求める必要十分条件は　**$\boldsymbol{n}$ は 4 の倍数** ■

$\boxed{4}$ (1) $\mathrm{P_1}(3, -1,\ 1)$, $\mathrm{P_2}(5,\ 0, -1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (2,\ 1, -2)$

$$\mathrm{P_1P_2} = |\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \mathbf{3}$$

(2) $d_1 = \mathrm{P_1P_3}$，$d_2 = \mathrm{P_2P_3}$ とし，C の半径を r とすると

$$d_1 + d_2 = 3, \quad {d_1}^2 + r^2 = 5, \quad {d_2}^2 + r^2 = 2 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 2 式，第 3 式から r^2 を消去し，第 1 式を代入すると

$$ {d_1}^2 - {d_2}^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = 3 \quad \text{ゆえに} \quad d_1 - d_2 = 1$$

$d_1,\ d_2$ の連立方程式を解いて $d_1 = 2,\ d_2 = 1$ $(*)$ から $\boldsymbol{r = 1}$
$\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を $2:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (3, -1,\ 1) + \frac{2}{3}(2,\ 1, -2) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

よって $\quad \mathbf{P_3}\left(\boldsymbol{\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}}\right)$

(3) xy 平面，H はそれぞれベクトル $\vec{v} = (0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (2,\ 1, -2)$ に垂直であるから，求めるベクトルと平行なベクトルは

$$\vec{v} \times \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (-1,\ 2,\ 0)$$

$|\vec{v} \times \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| = \sqrt{5}$ より，求める単位ベクトルは $\quad \boldsymbol{\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)}$

(4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)$ とする．
$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ と (3) で求めたベクトルの両方に垂直なベクトルは

$$(2,\ 1, -2) \times (-1,\ 2,\ 0) = (4,\ 2,\ 5)$$

これと平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_2} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$ とする．
C の半径は 1 であるから，C 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 θ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} + (\cos\theta)\vec{e_1} + (\sin\theta)\vec{e_2} \qquad (**)$$

$\mathrm{P_3}$ の z 座標が負であるから，$\sin\theta = -1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{d = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}}$

$\sin\theta = -1$，$\cos\theta = 0$ により $\quad \mathbf{Q}\left(\dfrac{65 - 4\sqrt{5}}{15}, -\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}, -\dfrac{1 + \sqrt{5}}{3}\right)$

解説 $\mathrm{P}_1(3, -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 の方程式は

$$S_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

$\mathrm{P}_2(5,\ 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 の方程式は

$$S_2 : (x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$$

S_1 および S_2 の方程式の辺々の差をとり整理すると，C を含む平面

$$H : 2x + y - 2z - 9 = 0$$

を得る．このとき，H の法ベクトル $\vec{n} = (2,\ 1, -2)$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ と平行である．
また，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると，媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}} = t\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \quad \text{ゆえに} \quad (x-3,\ y+1,\ z-1) = t(2,\ 1, -2)$$

これから t を介して，次の直線 ℓ の方程式を得る．

$$\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

ℓ と H の交点 P_3 は

$$x = 2t+3, \quad y = t-1, \quad z = -2t+1 \tag{A}$$

を H に代入すると

$$2(2t+3) + t - 1 - 2(-2t+1) - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

これを (A) に代入すると，$\mathrm{P}_3\left(\dfrac{13}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ を得る．
また，点 $\mathrm{P}_1(3, -1,\ 1)$ と平面 H の距離は，点と平面の距離の公式により

$$\frac{|2\cdot 3 + (-1) - 2\cdot 1 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

直線の方程式

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = t \qquad (t \text{ は媒介変数})$$

点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $H : ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$\boldsymbol{h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

点 P を通り，方向ベクトルが $\vec{n}$ の直線の方程式が ℓ であるから

$$x=at+x_1,\quad y=bt+y_1,\quad z=ct+z_1$$

ℓ と H の交点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2=at_0+x_1,\quad y_2=bt_0+y_1,\quad z_2=ct_0+z_1 \qquad (*)$$

Q は H 上の点であるから

$$a(at_0+x_1)+b(bt_0+y_1)+c(ct_0+z_1)+d=0$$

これを t_0 について解くと $\quad t_0=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

$(*)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \text{証終}$$

補足 3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．平面 ABC 上の任意の点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$a(x-a_1)+b(y-b_1)+c(z-c_1)=0$$

点 $\mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3)$ から平面 ABC までの距離 h は

$$h=\frac{|a(d_1-a_1)+b(d_2-a_2)+c(d_3-a_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

$\triangle$ABC の面積は $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より [2]，四面体 ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\boldsymbol{\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \quad \blacksquare$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10)

5 (1) $xf(x)=\log(2x-3)$ の両辺を微分すると

$$f(x)+xf'(x)=\frac{2}{2x-3}$$

両辺に $x(2x-3)$ を掛けると

$$x(2x-3)f(x)+x^2(2x-3)f'(x)=2x$$

したがって $\quad g(x)=x^2(2x-3)f'(x)=2x-x(2x-3)f(x)$
$$=\boldsymbol{2x-(2x-3)\log(2x-3)}$$

(2) (1) の結果から $\quad g'(x)=-2\log(2x-3)$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\{2x-(2x-3)\log(2x-3)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{\frac{2x}{2x-3}-\log(2x-3)\right\}=-\infty$$

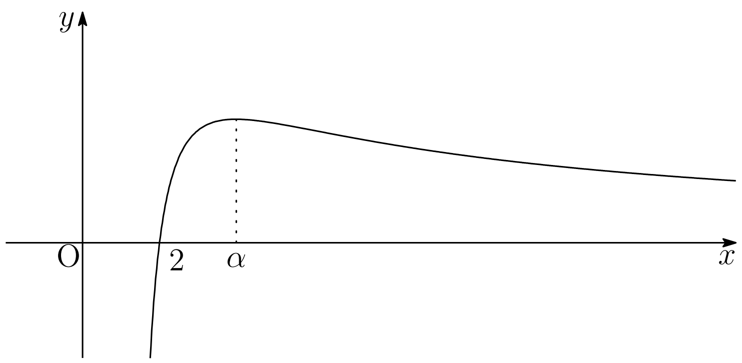
よって $\quad g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する．

(3) $x>2$ のとき，$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致するから

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=0$$

したがって，グラフの概形は次のようになる．



(4) $f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$ より　$e^{f(x)}=(2x-3)^{\frac{1}{x}}$

$h(x)=(2x-3)^{\frac{1}{x}}$ とすると $(x \geqq 2)$，$h(x)$ は $x=\alpha$ で極大値をとる．

$3^4=81,\ 5^3=125$ より　$3^4<5^3$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}$

$5^5=3125,\ 7^4=2401$ より　$5^5>7^4$　ゆえに　$5^{\frac{1}{4}}>7^{\frac{1}{5}}$

$9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$ より　$h(6)=h(3)$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}>7^{\frac{1}{5}}>9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$

すなわち　$h(3)<h(4)>h(5)>h(6)=h(3)$　$\cdots$①

2 整数 $m,\ n\ (2 \leqq m<n)$ が

$$(2m-3)^n=(2n-3)^m \quad \text{すなわち} \quad h(m)=h(n)$$

を満たすとき，$2<m<\alpha$ であるから $(3<\alpha<5)$，① より

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(3,\ 6)}$$

■

6 (1) P(0, 0, 1)，Q($\cos\theta$, $\sin\theta$, 0) より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\cos\theta,\ \sin\theta, -1)$

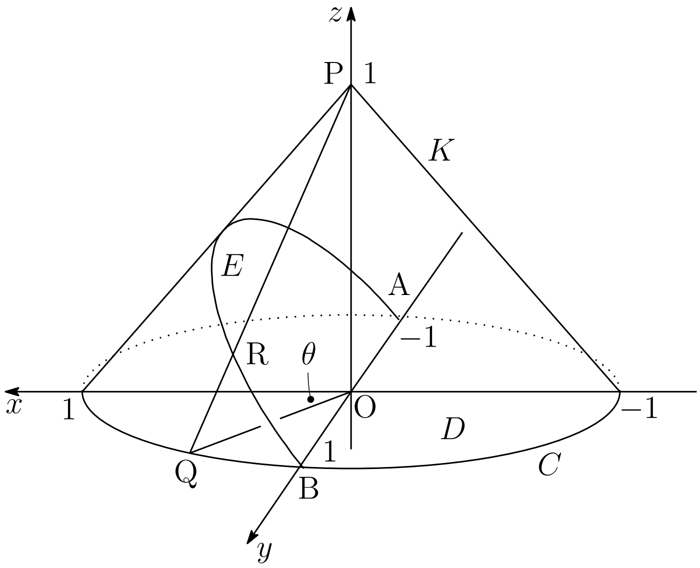
$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0,\ 0,\ 1) + t(\cos\theta,\ \sin\theta, -1)\\ &= (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)\end{aligned}$$

R は平面 $z = x$ 上の点であるから

$$1 - t = t\cos\theta \quad ゆえに \quad t = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{2}$ であるから　$r(\theta) = |t||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}}$

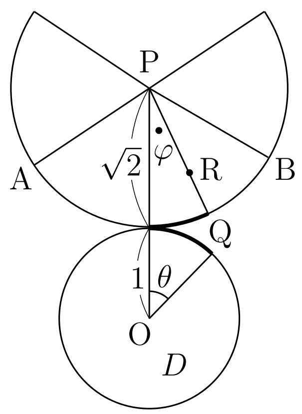


(2) 右の図の展開図において，PR の偏角を φ とし，これと D 上の偏角 θ について

$$\theta = \sqrt{2}\varphi$$

であるから，$\tilde{r}(\varphi) = r(\theta)$ とすると

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\sqrt{2}\varphi}$$



θ と φ の変換に注意して

$$S(\theta+h)-S(\theta)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \tag{A}$$

$\tilde{r}(\varphi)=r(\sqrt{2}\varphi)$，$\tilde{r}(\varphi)$ は $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ において，単調増加であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \leqq \frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi$$

したがって
$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi\leqq\frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \tag{B}$$

(A)，(B) から次式が成立する．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq S(\theta+h)-S(\theta)\leqq\frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 展開図において，半径 $\sqrt{2}$ で中心角 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ の扇形の面積を S_1 とし，線分 PR が通過する部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r(\theta)^2\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta\end{aligned}$$

$u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とすると　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1+u^2}{2}$

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
u	$0\longrightarrow 1$

$\cos\theta=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ より，$\dfrac{1}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+u^2}{2}$ であるから

$$S_2=\sqrt{2}\int_0^1\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2\frac{2du}{1+u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+u^2)\,du=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　$T=S_1-S_2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

補足 (2) の結果から，$S'(\theta)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{1}{2}r(\theta)^2$ でもよい． ■