

令和6年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 a を正の実数とし, $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする. O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする. 直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし, O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする. ただし, $q > 0$ とする.

- (1) p, q の値を a を用いて表せ. また, $p > q$ であることを示せ.
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分, 線分 OP , および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく. S を a を用いて表せ.
- (3) (2) の S に対し, $S = \frac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ.

2 以下の問いに答えよ.

- (1) t を $t > 1$ を満たす実数とする. 正の実数 x が2つの条件

- (a) $x > \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$

- (b) $x \geq 2 \log_t x$

をともに満たすとする. このとき, 不等式

$$x + 1 > 2 \log_t(x + 1)$$

を示せ.

- (2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ.

3 n を 2 以上の整数とする．それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える．この試行を n 回繰り返して，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ， n 文字の文字列を作る．作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする．また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする．これらの場合以外は可とする．たとえば $n = 6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA など不可で，文字列 BABAAB や BABABA など可である．作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n ，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n ，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく．

- (1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ．また， $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ．
- (2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ．
- (3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ．ただし， i は虚数単位である．
- (4) $p_n = r_n$ を満たすための， n の必要十分条件を求めよ．

4 xyz 空間において，点 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える．

- (1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ．
- (2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ．この交わりは円となる．この円を C とし，その中心を P_3 とする． C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ．
- (3) (2) の円 C に対し， C を含む平面を H とする． xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．
- (4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき， Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ．また， d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ．

5 $x \geq 2$ を満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく. 必要ならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であることと, および, 自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい.

- (1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき, 関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ.
- (2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し, $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ.
- (3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ, $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け. ただし, (2) の α を用いてよい. グラフの凹凸は調べなくてよい.
- (4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して, 等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする. このような組 (m, n) をすべて求めよ.

6 xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ を考える. D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする. $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする. xyz 空間内の平面 $H: z = x$ を考える. すなわち, H は zx 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともにも含む平面である. K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し, 円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり, 線分 PQ と E の共有点を R とする.

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく. $r(\theta)$ を θ を用いて表せ.
- (2) 円錐 K の側面のうち, 曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分, 線分 PA , および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく. θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta+h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち, 円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく. T を求めよ. 必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい.

解答例

- 1 (1) $C: y = (x-a)^2 + 3a^2$ について, $f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より, 頂点 A は $(a, 3a^2)$
 直線 OA の傾きは $3a$ であるから, その方程式は $y = 3ax$
 これと $C: y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから, 点 P の x 座標 p は $p = 4a$
 $f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $Q(q, f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち $y = 2(q - a)x - q^2 + 4a^2$

これが原点を通るから ($q > 0, a > 0$)

$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = 2a$$

$p = 4a, q = 2a$ であるから ($a > 0$) $p > q$

- (2) 曲線 $C: y = f(x)$ と $Q(q, f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする. このとき¹

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x - q) + (x - q)^2$$

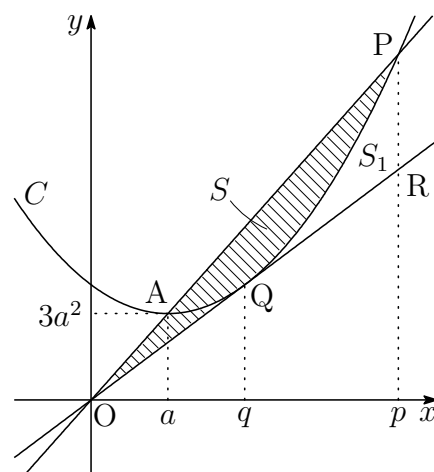
であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x - q)\} dx \\ &= \int_q^p (x - q)^2 dx = \frac{1}{3}(p - q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a - 2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$

接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると
 $P(4a, 12a^2), R(4a, 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle OPR - S_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

- (3) $S = \frac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると $\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}$ これを解いて $a = \frac{1}{2}$



¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai-2020.pdf> (p.15 を参照)

別解 直線 $x = 2a$ と直線 OP の交点を Q' とすると $Q(2a, 4a^2)$, $Q'(2a, 6a^2)$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}p \cdot QQ' = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a^2 = 4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は、1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p - q)^3 = \frac{1}{6}(4a - 2a)^3 = \frac{4}{3}a^3$$

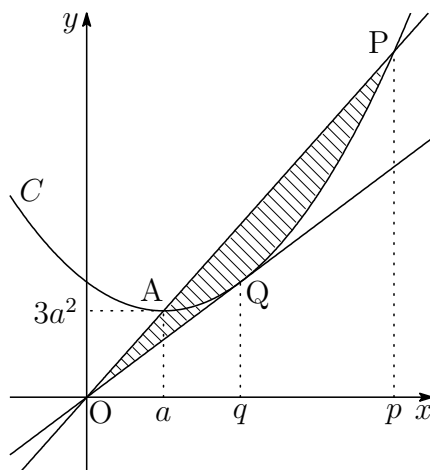
よって、求める面積は $S = 4a^3 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3$

解説 $xy' - y = x(2x - 2a) - (x^2 - 2ax + 4a^2)$
 $= (x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$S = \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^{4a} = \frac{16}{3}a^3$$



補足 解説の公式は、ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである。このとき、積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる。例えば、 C と線分 OQ, OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる。

$$S' = \frac{1}{2} \int_{2a}^a (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^a \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^a = \frac{5}{6}a^3$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad x \geq 2 \log_t x \text{ より } x+1 \geq 2 \log_t x + 1 = 2 \log_t \sqrt{t}x \quad \dots \textcircled{1}$$

$x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$ より ($t > 1$), $(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに } \sqrt{t}x > x+1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } x+1 > 2 \log_t(x+1)$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結論に } t=2 \text{ を代入すると, } x > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \text{ のとき}$$

$$x \geq 2 \log_2 x \implies x+1 > 2 \log_2(x+1)$$

これから, $x > \sqrt{2}+1$ のとき $2^x \geq x^2 \implies 2^{x+1} > (x+1)^2 \quad \dots (*)$

(*) より, $2^N \geq N^2$ ($N \geq 3$) を満たす自然数 N が存在するならば, $n > N$ であるすべての自然数 n について, 次が成立する.

$$2^n > n^2$$

$n \leq 2 \log_2 n$ を変形すると $2^n \leq n^2 \quad \dots (**)$

したがって, (**) を満たす n は $n \leq N$ に限られる.

$n = 1, 2, 3, 4$ について, 2^n と n^2 の値を調べると, 下の表から $N = 4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

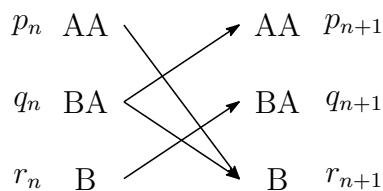
よって, (**) を満たす n は $n = 2, 3, 4$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad q_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad r_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

求める漸化式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n)$$

数列 $\{p_n + 2q_n + 2r_n\}$ は $p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \frac{4}{3}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} = -\frac{1}{3}(1+i)\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$$

数列 $\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$ は $p_2 + iq_2 - (1+i)r_2 = \frac{2}{9}$, 公比 $-\frac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + iq_n - (1+i)r_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

(4) (3) の結果についてその共役複素数を考えると

$$p_n - iq_n - (1-i)r_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

上式と (3) の結果の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2(p_n - r_n) &= \frac{2}{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} \right\} \\ &= \frac{4}{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2} \cos \frac{n-2}{4} \pi \end{aligned}$$

$p_n = q_n$ のとき, 整数 k を用いて $\frac{n-2}{4} \pi = \frac{2k-1}{2} \pi$ ゆえに $n = 4k$ によって, 求める必要十分条件は n は 4 の倍数 ■

4 (1) $P_1(3, -1, 1), P_2(5, 0, -1)$ より $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, -2)$

$$P_1P_2 = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$$

(2) $d_1 = P_1P_3, d_2 = P_2P_3$ とし, C の半径を r とすると

$$d_1 + d_2 = 3, \quad d_1^2 + r^2 = 5, \quad d_2^2 + r^2 = 2 \quad (*)$$

(*) の第 2 式, 第 3 式から r^2 を消去し, 第 1 式を代入すると

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = 3 \quad \text{ゆえに} \quad d_1 - d_2 = 1$$

d_1, d_2 の連立方程式を解いて $d_1 = 2, d_2 = 1$ (*) から $r = 1$

P_3 は線分 P_1P_2 を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 1) + \frac{2}{3}(2, 1, -2) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

よって $P_3 \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(3) xy 平面, H はそれぞれベクトル $\vec{v} = (0, 0, 1), \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, -2)$ に垂直であるから, 求めるベクトルと平行なベクトルは

$$\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 2, 0)$$

$|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{5}$ より, 求める単位ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$

(4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$ とする.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ と (3) で求めたベクトルの両方に垂直なベクトルは

$$(2, 1, -2) \times (-1, 2, 0) = (4, 2, 5)$$

これと平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, 5)$ とする.

C の半径は 1 であるから, C 上の点 $Q(x, y, z)$ は, 媒介変数 θ を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_3} + (\cos \theta)\vec{e}_1 + (\sin \theta)\vec{e}_2 \quad (**)$$

P_3 の z 座標が負であるから, $\sin \theta = -1$ のとき, 最大値 $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}$

$\sin \theta = -1, \cos \theta = 0$ により $Q \left(\frac{65 - 4\sqrt{5}}{15}, -\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{3}\right)$

解説 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 の方程式は

$$S_1 : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$$

$P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 の方程式は

$$S_2 : (x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2$$

S_1 および S_2 の方程式の辺々の差をとり整理すると, C を含む平面

$$H : 2x + y - 2z - 9 = 0$$

を得る. このとき, H の法ベクトル $\vec{n} = (2, 1, -2)$ は $\overrightarrow{P_1P_2}$ と平行である.

また, 直線 P_1P_2 上に点 $P(x, y, z)$ をとると, 媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{ゆえに} \quad (x - 3, y + 1, z - 1) = t(2, 1, -2)$$

これから t を介して, 次の直線 l の方程式を得る.

$$l : \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 1}{-2} = t$$

l と H の交点 P_3 は

$$x = 2t + 3, \quad y = t - 1, \quad z = -2t + 1 \quad (\text{A})$$

を H に代入すると

$$2(2t + 3) + t - 1 - 2(-2t + 1) - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

これを (A) に代入すると, $P_3\left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ を得る.

また, 点 $P_1(3, -1, 1)$ と平面 H の距離は, 点と平面の距離の公式により

$$\frac{|2 \cdot 3 + (-1) - 2 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

直線の方程式

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ を通り, 方向ベクトル $\vec{v} = (a, b, c)$ の直線 l の方程式は

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \quad (t \text{ は媒介変数})$$

点と平面の距離

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と平面 $H: ax + by + cz + d = 0$ の距離 h は

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは $\vec{n} = (a, b, c)$

点 P を通り、方向ベクトルが \vec{n} の直線の方程式が ℓ であるから

$$x = at + x_1, \quad y = bt + y_1, \quad z = ct + z_1$$

ℓ と H の交点を $Q(x_2, y_2, z_2)$ とし、そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2 = at_0 + x_1, \quad y_2 = bt_0 + y_1, \quad z_2 = ct_0 + z_1 \quad (*)$$

Q は H 上の点であるから

$$a(at_0 + x_1) + b(bt_0 + y_1) + c(ct_0 + z_1) + d = 0$$

これを t_0 について解くと $t_0 = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

(*) より、 $\vec{PQ} = (at_0, bt_0, ct_0)$ であるから

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= |t_0| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left| -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{証終} \end{aligned}$$

補足 3点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n} = (a, b, c) = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

とする. 平面 ABC 上の任意の点を $T(x, y, z)$ とすると, $\vec{n} \perp \vec{AT}$ より

$$a(x - a_1) + b(y - b_1) + c(z - c_1) = 0$$

点 $D(d_1, d_2, d_3)$ から平面 ABC までの距離 h は

$$\begin{aligned} h &= \frac{|a(d_1 - a_1) + b(d_2 - a_2) + c(d_3 - a_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積は $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ より², 四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot \frac{|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| \quad \blacksquare$$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10)

5 (1) $xf(x) = \log(2x - 3)$ の両辺を微分すると

$$f(x) + xf'(x) = \frac{2}{2x - 3}$$

両辺に $x(2x - 3)$ を掛けると

$$x(2x - 3)f(x) + x^2(2x - 3)f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } g(x) &= x^2(2x - 3)f'(x) = 2x - x(2x - 3)f(x) \\ &= 2x - (2x - 3)\log(2x - 3) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $g'(x) = -2\log(2x - 3)$

x	(0)	...	2	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗	4	↘

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{2x - (2x - 3)\log(2x - 3)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3) \left\{ \frac{2x}{2x - 3} - \log(2x - 3) \right\} = -\infty \end{aligned}$$

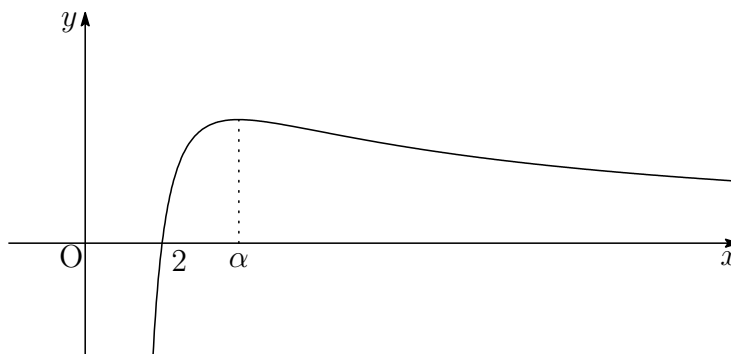
よって $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する.

(3) $x > 2$ のとき, $f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致するから

x	2	...	α	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	極大	↘

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2x - 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x} \cdot \frac{\log(2x - 3)}{2x - 3} = 0$$

したがって, グラフの概形は次のようになる.



$$(4) f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x} \text{ より } e^{f(x)} = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$$

$h(x) = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$ とすると ($x \geq 2$), $h(x)$ は $x = \alpha$ で極大値をとる.

$$3^4 = 81, 5^3 = 125 \text{ より } 3^4 < 5^3 \text{ ゆえに } 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}}$$

$$5^5 = 3125, 7^4 = 2401 \text{ より } 5^5 > 7^4 \text{ ゆえに } 5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}}$$

$$9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \text{ より } h(6) = h(3) \text{ ゆえに } 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}} > 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{すなわち } h(3) < h(4) > h(5) > h(6) = h(3) \quad \dots \textcircled{1}$$

2 整数 m, n ($2 \leq m < n$) が

$$(2m-3)^n = (2n-3)^m \text{ すなわち } h(m) = h(n)$$

を満たすとき, $2 < m < \alpha$ であるから ($3 < \alpha < 5$), ① より

$$(m, n) = (3, 6)$$



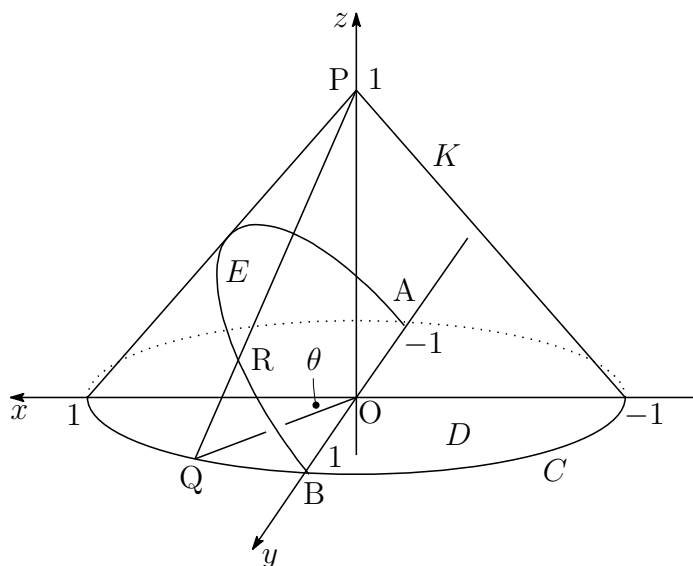
- 6 (1) $P(0, 0, 1)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ より $\overrightarrow{PQ} = (\cos \theta, \sin \theta, -1)$
 $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) + t(\cos \theta, \sin \theta, -1) \\ &= (t \cos \theta, t \sin \theta, 1 - t)\end{aligned}$$

R は平面 $z = x$ 上の点であるから

$$1 - t = t \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2} \text{ であるから} \quad r(\theta) = |t||\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta}$$

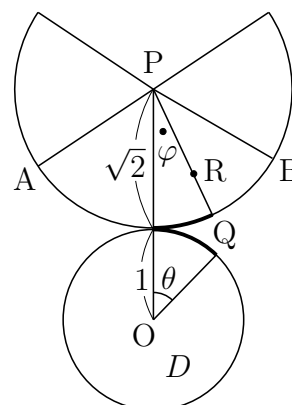


- (2) 右の図の展開図において、 PR の偏角を φ とし、これと D 上の偏角 θ について

$$\theta = \sqrt{2}\varphi$$

であるから、 $\tilde{r}(\varphi) = r(\theta)$ とすると

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \sqrt{2}\varphi}$$



θ と φ の変換に注意して

$$S(\theta + h) - S(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \quad (\text{A})$$

$\tilde{r}(\varphi) = r(2\varphi)$, $\tilde{r}(\varphi)$ は $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ において, 単調増加であるから

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r} \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right)^2 d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r} \left(\frac{\theta+h}{\sqrt{2}} \right)^2 d\varphi$$

$$\text{したがって} \quad \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \quad (\text{B})$$

(A), (B) から次式が成立する.

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 展開図において, 半径 $\sqrt{2}$ で中心角 $\angle APB = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ の扇形の面積を S_1 とし, 線分 PR が通過する部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \\ S_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta \end{aligned}$$

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とすると } \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1+u^2}{2} \quad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ より, } \frac{1}{1+\cos \theta} = \frac{1+u^2}{2} \text{ であるから}$$

$$S_2 = \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{1+u^2}{2} \right)^2 \frac{2du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1+u^2) du = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \quad T = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

補足 (2) の結果から, $S'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{1}{2}r(\theta)^2$ でもよい. ■