令和５年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある．玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする．A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う．ただし取り出した玉は袋の中には戻さない．A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームは終了する．

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ．

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ．

2 関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ．

(2) 正の整数 m に対して，$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ．

3 s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_n を n と s を用いて表せ．

(2) ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする．s を m を用いて表せ．

$\boxed{4}$ 実数 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える．

(1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする．α を極形式で表せ．ただし，$r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい．

(3) 設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 四面体 OABC において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする．

$$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$

ただし，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す．さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする．点 C から 3 点 O，A，B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線を OK とする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ．

$\boxed{6}$ 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ．

(2) 座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える．x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け．また S の面積を求めよ．

解答例

1 (1) 赤玉 4 個，白玉 5 個の計 9 個を取り出す場合の総数は (9 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \quad (\text{通り})$$

ゲームが引き分けとなるのは，次の 1 通り．

白	赤	白	赤	白	赤	白	赤	白

よって，求める確率は $\mathbf{\dfrac{1}{126}}$

(2) A が勝つのは，次の場合である．

赤								

白	赤	赤						

白	赤	白	赤	赤				

白	赤	白	赤	白	赤	赤		

これらの総数は

$$\frac{8!}{3!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{2!}{2!} = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

よって，求める確率は $\dfrac{76}{126} = \mathbf{\dfrac{38}{63}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = \sin 3x + \sin x$ より

$$f(x) = 2\sin 2x\cos x = 4\sin x\cos^2 x$$
$$= -4\sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

したがって，$f(x) = 0$ の解は　$x = \dfrac{k\pi}{2}$ (k は整数)　(∗)

よって，求める最小の正の実数 x は　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$

(2) (∗) より，正の整数 m に対して

$$\frac{k\pi}{2} \leqq m < \frac{(k+1)\pi}{2}$$

を満たす $k = p(m)$ がただ 1 つ存在する．

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{k}{m} \leqq \frac{2}{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$$

上の第 2 式から，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \dfrac{p(m)}{m} = \dfrac{2}{\pi}}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(n+2)a_{n+1} = na_n + 2$ より

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n + 2(n+1)$$

$n > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)(k+2)a_{k+1} - k(k+1)a_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$

$$n(n+1)a_n - 2a_1 = (n-1)(n+2)$$

したがって $\quad a_n = \dfrac{(n-1)(n+2)+2s}{n(n+1)}$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n &= m + 2(s-1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= m + 2(s-1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\\ &= m\left\{1 + \frac{2(s-1)}{m+1}\right\}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとき，$m \neq 0$ であるから

$$1 + \frac{2(s-1)}{m+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s = \frac{1-m}{2}}$$

■

4 (1) $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$BCD より　$1 : 1 + a = a : 1$

したがって　$a^2 + a - 1 = 0$　$\cdots$①

$a > 0$ に注意して　$a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$

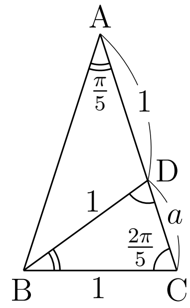
$w = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと

$$w^5 = 1,\quad \overline{w}^5 = 1$$

$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$ とおくと

$$g(w) = 0,\quad g(\overline{w}) = 0$$

$f(x) = x^2 - ax + 1 = (x-w)(x-\overline{w})$ より，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．



(2) $\alpha = w$ であるから　$\boldsymbol{\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}}$

(3) $\alpha + \alpha^{-1} = a,\ \alpha^5 = 1,\ \alpha^{-5} = 1$ であるから，① を利用して

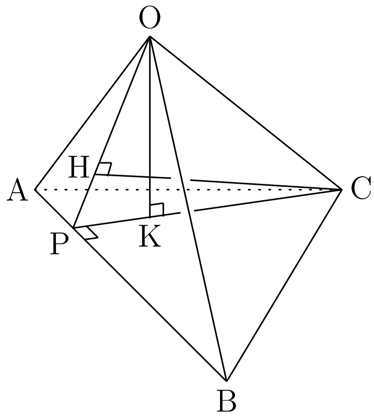
$$\begin{aligned}\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} &= \alpha^3 + \alpha^{-3} = \alpha^{-2} + \alpha^2\\ &= (\alpha + \alpha^{-1})^2 - 2 = a^2 - 2\\ &= (1-a) - 2 = -(a+1) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$ ゆえに $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$ より $\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathbf{3}$

(2) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}$, $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{3}$ とおくと



$$|\vec{u}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} + \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 3$$
$$|\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 1$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{9}{9} = 0$$
$$\vec{c}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2}$$
$$\vec{c}\cdot\vec{v} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{c}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{5}{6}\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{3}\right) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\vec{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{\vec{b}}$$

(3) OH と AB の交点を P とすると，OC⊥AB より OP⊥AB

(2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{6\vec{a}+\vec{b}}{7} - \vec{c} = \frac{1}{7}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c})$$

$\vec{d} = 6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}$ とおくと

$$|\vec{d}|^2 = |6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}|^2 = 36|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 49|\vec{c}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} - 14\vec{b}\cdot\vec{c} - 84\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$= 36\cdot4 + 9 + 49\cdot6 + 12\cdot3 - 14\cdot3 - 84\cdot3 = 189$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d} = -\vec{c}\cdot(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = -6\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{c} + 7|\vec{c}|^2 = -6\cdot3 - 3 + 7\cdot6 = 21$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}\vec{d} = \dfrac{21}{189}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} - \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \dfrac{2}{9}\vec{c}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{HK}} /\!/ \vec{c}$ ■

6 (1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{6x+1}$ を微分すると　$f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{24}{(6x+1)^2}$

$f'(x)=1$ とすると　$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{24}{(6x+1)^2}=1$

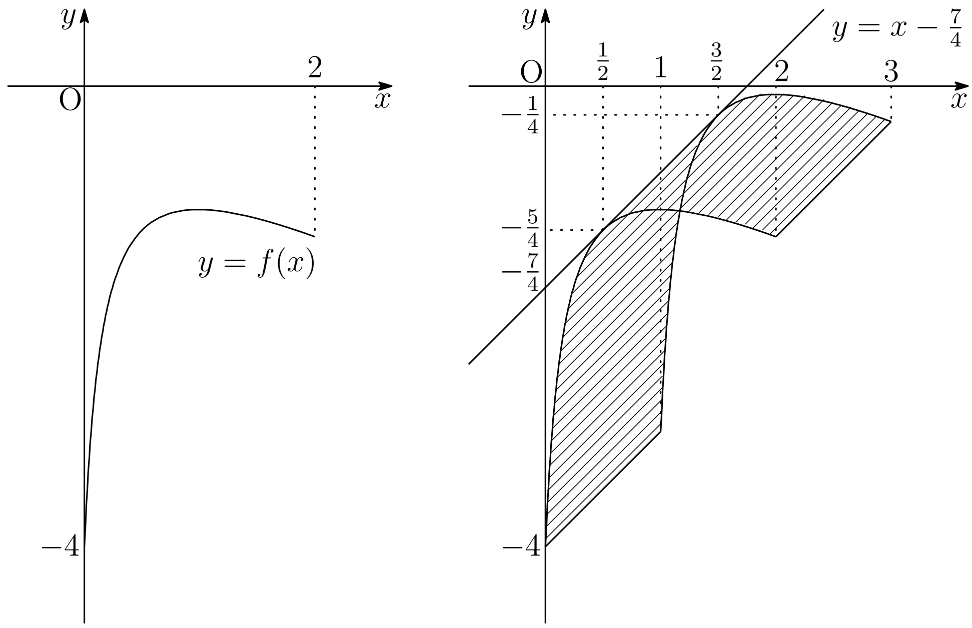
整理すると　$(6x+1)^2=16$　$x>0$ より　$x=\dfrac{1}{2}$　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ を通り，傾き 1 であるから

$$y+\frac{5}{4}=x-\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=x-\frac{7}{4}}$$

(2) $x>0$ において $f''(x)=-\dfrac{288}{(6x+1)^3}<0$ より，$y=f(x)$ は上に凸．

(1) の結果から点 Q の軌跡を表す曲線 $y=f(x-1)+1$ は点 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ で (1) で求めた直線と接する．図形 S は，右下の図の斜線部分で境界線を含む．

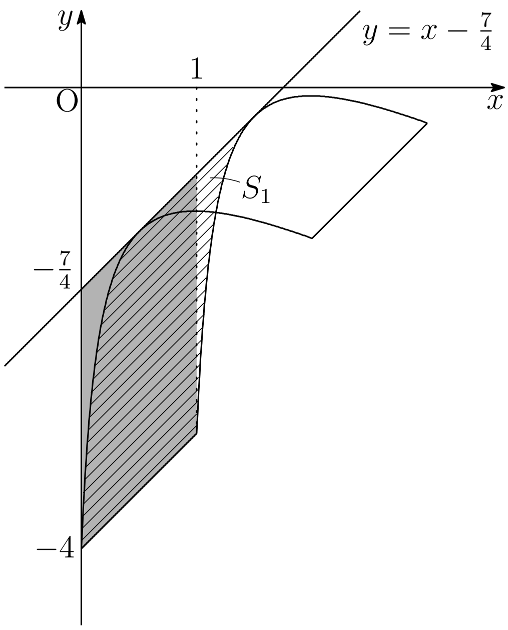


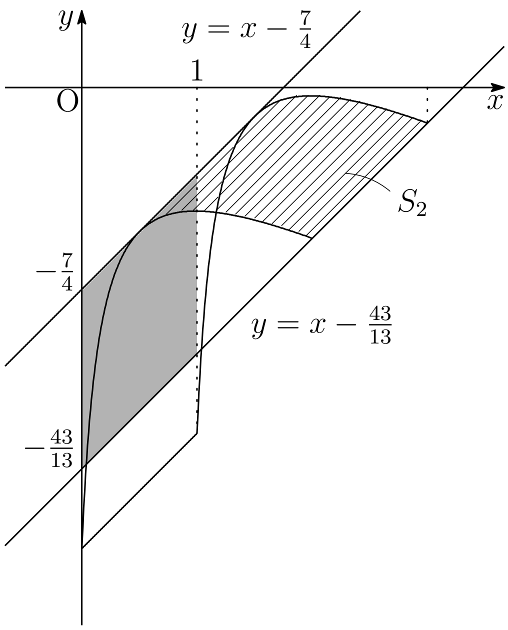
$f(0)=-4$，$f(2)=-\dfrac{17}{13}$ より，点 $(2,\ f(2))$ を通り，傾き 1 の直線は

$$y+\frac{17}{13}=x-2 \quad \text{ゆえに} \quad y=x-\frac{43}{13}$$

カバリエリの原理により，下の図の斜線部分の面積は

$$S_1=\left\{-\frac{7}{4}-(-4)\right\}=\frac{9}{4},\quad S_2=\left\{-\frac{7}{4}-\left(-\frac{43}{13}\right)\right\}=\frac{81}{52}$$





2 曲線 $y=f(x)$ と $y=f(x-1)+1$ の共有点の x 座標は $(1<x<2)$

$$-\frac{x}{2}-\frac{4}{6x+1}=-\frac{x-1}{2}-\frac{4}{6x-5}+1$$

整理すると　$12x^2-8x-7=0$　ゆえに　$(2x+1)(6x-7)=0$

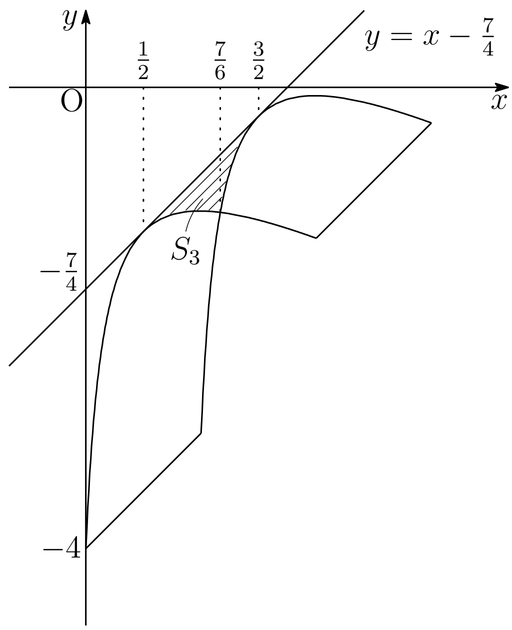
$1<x<2$ に注意して　$x=\dfrac{7}{6}$

$g(x)=x-\dfrac{7}{4}$ とし，下の図の斜線部分の面積を S_3 とすると

$$S_3=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}[g(x)-\{f(x-1)+1\}]dx$$

$g(x+1)-1=g(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}S_3&=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}\left(\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{4}{6x+1}\right)dx\\&=\left[\ \frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{2}{3}\log(6x+1)\ \right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}=-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\log 2\end{aligned}$$



よって　$S_1+S_2-S_3=\dfrac{9}{4}+\dfrac{81}{52}-\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}\log 2\right)=\boldsymbol{\dfrac{237}{52}-\dfrac{4}{3}\log 2}$ ■