令和４年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える．ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす．

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ．

(2) $K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ．

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ．

2 a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える．

(1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ．このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$ とする．$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ．

(3) $f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする．このとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

3 正の整数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする．

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

$\boxed{4}$ xy 平面の第 1 象限内において，直線 $\ell : y = mx$ $(m > 0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y = tx$ $(t > 0)$ を考える．また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする．ただし，$b > a$ とする．

(1) m を用いて t を表せ．

(2) t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 座標空間内において，ベクトル

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 1),\quad \vec{b} = (1,\ 1,\ -1),\quad \vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\vec{a},\quad \ell' : t\vec{b} + \vec{c}\quad (s,\ t\ \text{は実数})$$

を考える．点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく．次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく．同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\vec{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める．

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ．

(2) 極限値 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n,\ T = \lim_{n\to\infty} t_n$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $S,\ T$ に対して，点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\vec{a})$，$\mathrm{B}(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 $\ell,\ \ell'$ の両方と直交することを示せ．

$\boxed{6}$ 半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える．直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $l,\ m,\ n$ は正の奇数であるから

$$l=2a+1,\quad m=2b+1,\quad n=2c+1\quad (a,\ b,\ c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと，$l+m+n=99$ のとき

$$2a+1+2b+1+2c+1=99\quad \text{ゆえに}\quad a+b+c=48$$

これを満たす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$$_3\mathrm{H}_{48}={}_{3+48-1}\mathrm{C}_{48}={}_{50}\mathrm{C}_2=\frac{50\cdot49}{2}=\mathbf{1225}\ (\text{個})$$

(2) $l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つだけ含む組は

$$\text{(i)}\ \ l=m\neq n\qquad \text{(ii)}\ \ m=n\neq l\qquad \text{(iii)}\ \ n=l\neq m$$

の 3 つの場合がある．(i) について

$$2a+1=2b+1\neq 2c+1\quad \text{ゆえに}\quad a=b\neq c,\ a+b+c=48$$

$b=a$ より，$c=48-2a\neq a$ であるから

$$a\geqq 0,\quad 48-2a\geqq 0,\quad 48-2a\neq a$$

a は 16 を除く 0 以上 24 以下の整数で 24 組ある．

(ii)，(iii) の場合も (i) の場合と同様にそれぞれ 24 組ある．

また，$l=m=n$ が等しい同じ奇数を含む組が 1 組ある．

よって，求める個数は　$24\times3+1=\mathbf{73}$ (個)

(3) $K=2k+3$ とおき (k は 1 以上の整数)，N を求める．(1) と同様に

$$2a+1+2b+1+2c+1=2k+3\quad \text{ゆえに}\quad a+b+c=k$$

したがって　$N={}_3\mathrm{H}_k={}_{3+k-1}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$

$N>K$ より　$\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}>2k+3$　ゆえに　$k(k-1)>4$

これを満たす最小の k が 3 であるから，求める K は　$2\cdot3+3=\mathbf{9}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = (x^2+3x+a)(x+1)^2$ の最小値が負であるとき，2 次方程式

$$x^2+3x+a=0$$

が異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D = 3^2 - 4a > 0 \quad よって \quad \boldsymbol{a < \frac{9}{4}}$$

(2) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)(x+1)^2 + (x^2+3x+a)\cdot 2(x+1) \\ &= (x+1)\{(2x+3)(x+1) + 2(x^2+3x+a)\} \\ &= (x+1)(4x^2+11x+2a+3) \end{aligned}$$

$g(x) = 4x^2+11x+2a+3$ とおくと　$g(-1) = 2(a-2) < 0$

$f'(x) = 0$ の実数解 -1，α_1，$\alpha_2(\alpha_1 < \alpha_2)$ について　$\alpha_1 < -1 < \alpha_2$

解と係数の関係から　　$\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{11}{4}$

$f'(x) = 4(x+1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ より

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで　$$\begin{aligned} f(x) &= \{(x+1)^2 + (x+1) + a - 2\}(x+1)^2 \\ &= (x+1)^4 + (x+1)^3 + (a-2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$-2-\alpha_2 < -1$ に注意して ($-2-\alpha_2$ と α_2 の中央が -1)

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) &= (\alpha_2+1)^4 + (\alpha_2+1)^3 + (a-2)(\alpha_2+1)^2 \\ f(-2-\alpha_2) &= (\alpha_2+1)^4 - (\alpha_2+1)^3 + (a-2)(\alpha_2+1)^2 \end{aligned}$$

$\alpha_2 + 1 > 0$ であるから　$f(-2-\alpha_2) < f(\alpha_2)$

また　$(-2-\alpha_2) - \alpha_1 = -2 - (\alpha_1+\alpha_2) = -2 - \left(-\dfrac{11}{4}\right) = \dfrac{3}{4} > 0$

$\alpha_1 < -2-\alpha_2 < -1$ および増減表から　$f(\alpha_1) < f(-2-\alpha_2)$

したがって　$f(\alpha_1) < f(-2-\alpha_2) < f(\alpha_2)$　よって　$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

別解 (2) の途中の計算から

$$f'(x) = -4(x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x) \qquad (\alpha_1 < \alpha_2)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) - f(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f'(x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{(x-\alpha_1)+(\alpha_1+1)\}(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)^2(\alpha_2 - x)\,dx \\ &\qquad - 4(\alpha_1+1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)\,dx \\ &= -4\cdot\frac{1}{12}(\alpha_2-\alpha_1)^4 - 4(\alpha_1+1)\cdot\frac{1}{6}(\alpha_2-\alpha_1)^3 \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3\{(\alpha_2-\alpha_1)+2(\alpha_1+1)\} \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3(\alpha_1+\alpha_2+2) \end{aligned}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{11}{4}$ であるから

$$f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = \frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_1)^3 > 0$$

よって　　$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

補足 次の積分公式[1]

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) $f'(x)=(x+1)g(x)$ について

$$g(x)=4\left(x+\frac{11}{8}\right)^2+2\left(a-\frac{73}{32}\right),\quad g(-1)=2(a-2)$$

であることと (1) の結果に注意して，$f(x)$ の増減を調べる．

(i) $a<2$ のとき，(2) の結果から，$\beta=\alpha_1$ とすれば成立する．

(ii) $a=2$ のとき，$g(x)=4x^2+11x+7=(x+1)(4x+7)$ より

$$f'(x)=(x+1)^2(4x+7)$$

x	$\cdots$	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	最小	↗	0	↗

したがって　$\beta=-\dfrac{7}{4}$

(iii) $2<a\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

(1) の結果から，$f(\alpha_1)\leqq 0=f(-1)$ であるから，$\beta=\alpha_1$

(iv) $\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{73}{32}$ のとき，(iii) の増減表と同じであるが，(1) の結果から $f(\alpha_1)>0=f(-1)$ となり，条件を満たさない．

(v) $a=\dfrac{73}{32}$ のとき，$f'(x)=4(x+1)\left(x+\dfrac{11}{8}\right)^2$

x	$\cdots$	$-\frac{11}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	0	↗

したがって　$\beta=-1$

(vi) $\dfrac{73}{32}<a$ のとき，$g(x)>0$ であるから

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

したがって　$\beta=-1$

以上から，(iv) 以外の場合であればよいから　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{9}{4},\ \dfrac{73}{32}\leqq a}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x>0$，$\sqrt{1+x}-1=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$ であるから

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \leqq \frac{x}{2} \\ \iff\ & \frac{x}{2+x} \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leqq \frac{x}{2} \\ \iff\ & 2+x \geqq \sqrt{1+x}+1 \geqq 2 \\ \iff\ & 1+x \geqq \sqrt{1+x} \geqq 1 \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

$r=\sqrt{1+x}$ とすると $r>1$ より　$r^2 \geqq r \geqq 1$

$(*)$ が成立するから，与えられた不等式も成立する．

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ を (1) の不等式に適用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq S_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}=\frac{n+1}{4n}$$

上式の左辺について

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(2n+1)}=\frac{n+1}{2(2n+1)}$$

したがって　$\dfrac{n+1}{2(2n+1)} \leqq S_n \leqq \dfrac{n+1}{4n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{4},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{4}$$

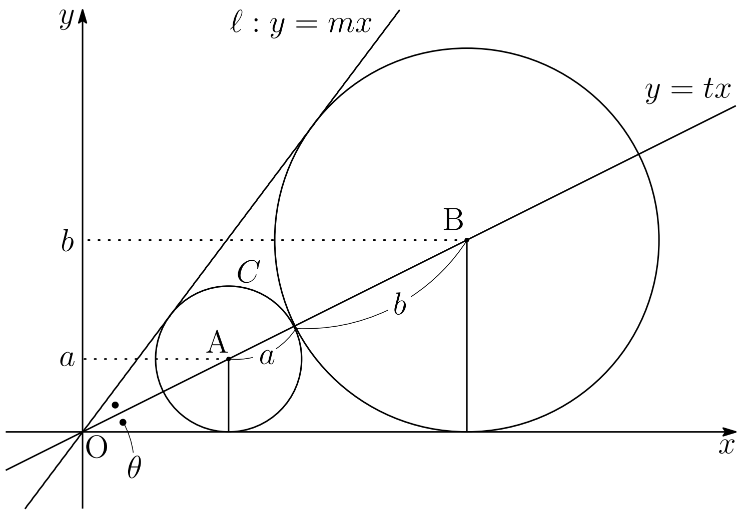
はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{\frac{1}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $t=\tan\theta$ とすると

$$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2t}{1-t^2}$$

t について整理すると　$mt^2+2t-m=0$

$m,\ t>0$ に注意して，t について解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}}$



(2) 円の中心を A, B とする．

$\mathrm{OA}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{b}{\sin\theta}$，$\mathrm{AB}=a+b$，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}-\mathrm{OA}$ であるから

$$a+b=\frac{b}{\sin\theta}-\frac{a}{\sin\theta}\quad \text{ゆえに}\quad a\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=b\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$$

$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ であるから

$$a\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+1\right)=b\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-1\right)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}=(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)$$

$m\to+0$ のとき $t\to+0$ であるから

$$\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\lim_{t\to+0}(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)=\mathbf{1}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=(t_n\vec{b}+\vec{c})-s_n\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}=s_{n+1}\vec{a}-(t_n\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}\perp\vec{a}$ であるから，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=0$，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot(t_n\vec{b}+\vec{c}-s_n\vec{a})=0,\quad \vec{a}\cdot(s_{n+1}\vec{a}-t_n\vec{b}-\vec{c})=0$$

$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 1,-1)$，$\vec{c}=(0,\ 0,\ 1)$ より

$$|\vec{a}|^2=6,\quad |\vec{b}|^2=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-1,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=1$$

したがって　$3t_n-1-2s_n=0,\quad 6s_{n+1}-2t_n-1=0$　$(*)$

上の 2 式から t_n を消去して整理すると　$\boldsymbol{s_{n+1}=\frac{2}{9}s_n+\frac{5}{18}}$

(2) (1) の結果から　$s_{n+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_n-\dfrac{5}{14}\right)$

$s_1=0$ であるから　$s_n=\dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$

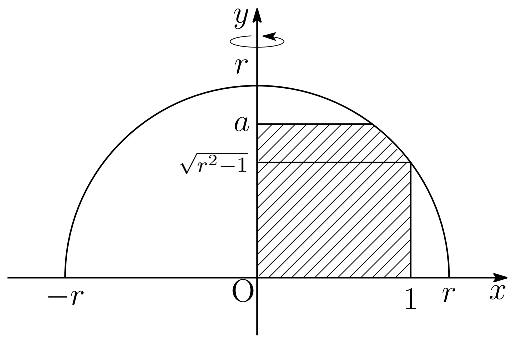
$(*)$ の第 1 式から　$3T-1-2S=0$ より　ゆえに　$T=\dfrac{1}{3}(2S+1)=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\dfrac{5}{14}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\frac{5}{14}|\vec{a}|^2+\frac{4}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot6+\frac{4}{7}\cdot2+1=0,\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\frac{5}{14}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{7}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot2+\frac{4}{7}\cdot3+(-1)=0\end{aligned}$$

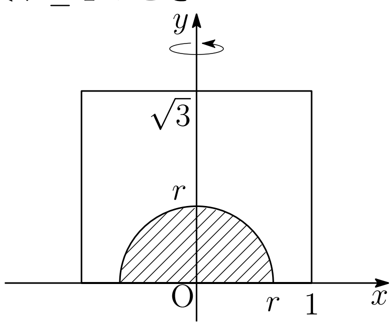
よって，直線 AB は 2 直線 ℓ, ℓ' の両方と直交する．■

6 図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を $I(a)$ とすると ($r \geqq 1$, $\sqrt{r^2-1} \leqq a \leqq r$)

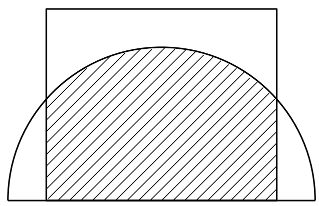


$$\begin{aligned}\frac{I(a)}{\pi} &= \sqrt{r^2-1} + \int_{\sqrt{r^2-1}}^{a} (r^2-y^2)\,dy \\ &= \sqrt{r^2-1} + \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{\sqrt{r^2-1}}^{a} \\ &= \sqrt{r^2-1} + r^2(a-\sqrt{r^2-1}) \\ &\qquad -\frac{1}{3}\{a^3-(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\} \\ &= a\left(r^2-\frac{a^2}{3}\right) - \frac{2}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

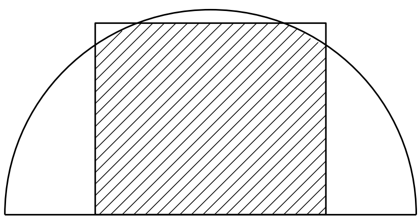
$0 < r \leqq 1$ のとき



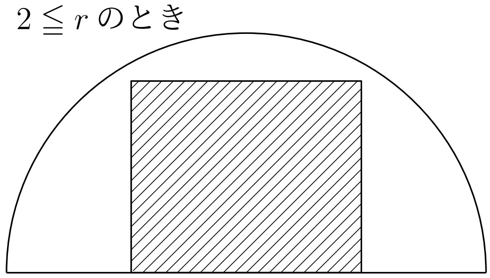
$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき



$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき



$2 \leqq r$ のとき



よって

$0 < r \leqq 1$ のとき $V(r) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi r^3}$

$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき $V(r) = I(r) = \boldsymbol{\dfrac{2\pi}{3}\{r^3-(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\}}$

$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき $V(r) = I(\sqrt{3}) = \boldsymbol{\pi(r^2-1)\left(\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)}$

$2 \leqq r$ のとき $V(r) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$ ■