

令和3年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 a, b を実数とする. 曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ.

2 a, b を $0 < a < 1, 0 < b < 1$ を満たす実数とする. 平面上の三角形 ABC を考え, 辺 AB を $a : 1 - a$ に内分する点を P , 辺 BC を $b : 1 - b$ に内分する点を Q , 辺 CA の中点を R とし, 三角形 ABC の面積を S , 三角形 PQR の面積を T とする.

(1) $\frac{T}{S}$ を a, b で表せ.

(2) a, b が $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ.

(3) p, q を3以上の整数とし, $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$ とする. $\frac{T}{S}$ の逆数 $\frac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ.

3 正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 3個の頂点を結んでできる三角形のうち, 直角三角形であるものの個数を求めよ.

(2) 3個の頂点を結んでできる三角形のうち, 直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ.

(3) 4個の頂点を結んでできる四角形のうち, 次の条件(*)を満たすものの個数を求めよ.

(*) 四角形の4個の頂点から3点を選んで直角三角形を作れる.

4 座標平面において, 次の条件(*)を満たす直線 l を考える.

(*) l の傾きは1で, 曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる3点で交わる.

その交点を x 座標が小さなものから順に P, Q, R とし, さらに線分 PQ の中点を S とする.

(1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき, 点 S の座標を求めよ.

(2) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき, 点 S の軌跡を求めよ.

(3) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき, 線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ.

5 z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ について，以下の問いに答えよ．

- (1) 3 点 O , A , B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ．
- (2) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ．
- (3) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ．

6 以下の問いに答えよ．

- (1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし， e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

解答例

1 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ とおくと、曲線 $y = f(x)$ は、点 $(0, 1)$ を通る.

$a < 0$ のとき、上に凸の放物線 $y = f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ.

したがって、 $a \geq 0$ であることが必要である.

[1] $a = 0$ のとき、直線 $y = bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geq 0$$

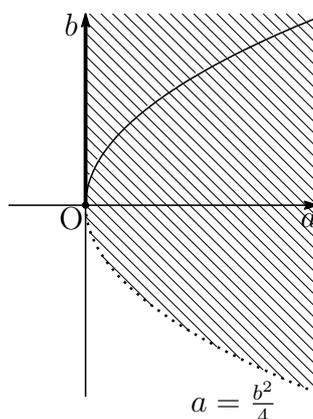
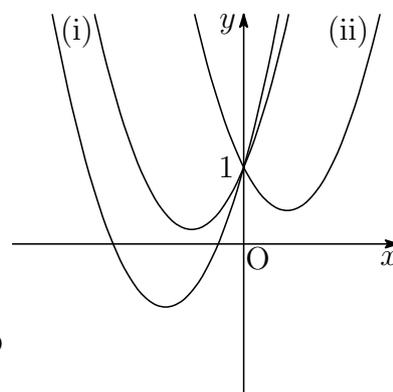
[2] $a > 0$ のとき、 $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4a}$ より、放物線 $y = f(x)$ の頂点に着目すると、条件を満たすのは、次の (i) または (ii) である.

$$(i) -\frac{b}{2a} \leq 0$$

$$(ii) -\frac{b}{2a} > 0, 1 - \frac{b^2}{4a} > 0$$

すなわち (i) $b \geq 0$ (ii) $b < 0, a > \frac{b^2}{4}$

[1], [2] より、求める領域は、下の図の斜線部分で、点線部分は含まない.



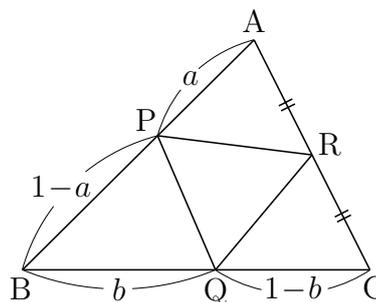
2 (1) 右の図から

$$\triangle APR = \frac{1}{2}aS$$

$$\triangle BQP = (1-a)bS$$

$$\triangle CRQ = \frac{1}{2}(1-b)S$$

したがって、 $\triangle PQR$ の面積 T は



$$\begin{aligned} T &= S - \triangle APR - \triangle BQP - \triangle CRQ \\ &= S - \frac{1}{2}aS - (1-a)bS - \frac{1}{2}(1-b)S \end{aligned}$$

よって
$$\frac{T}{S} = ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

(2) (1) の結果から
$$\frac{T}{S} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{1}{2} - b\right)$$

$$0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2} \text{ より } 0 < \frac{1}{2} - a < \frac{1}{2}, 0 < \frac{1}{2} - b < \frac{1}{2}$$

よって
$$\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$$

(3) (2) の結果から $2 < \frac{S}{T} < 4$ ゆえに $\frac{S}{T}$ が整数となるとき $\frac{S}{T} = 3$

$\frac{T}{S} = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{p}$, $b = \frac{1}{q}$ を (1) の結果に代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}$$

整理すると $pq - 3p - 3q + 6 = 0$ ゆえに $(p-3)(q-3) = 3$

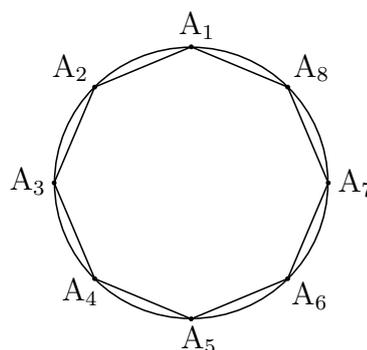
p, q は、3以上の整数であるから

$$(p-3, q-3) = (1, 3), (3, 1)$$

よって $(p, q) = (4, 6), (6, 4)$ ■

- 3** (1) 直角三角形の斜辺は、 A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 , A_4A_8 の4通りあり、それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が6通りある。よって、求める個数は

$$4 \times 6 = 24 \text{ (個)}$$



- (2) A_1 を挟む2辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$, $\triangle A_1A_4A_6$ の2個あるから、二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16 \text{ (個)}$$

- (1) と上の結果から、直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40 \text{ (個)}$$

3個の頂点を結んでできる三角形の総数は ${}_8C_3 = 56$ (個)

よって、求める個数は $56 - 40 = 16$ (個)

- (3) 直角三角形の斜辺となるのは、 A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 , A_4A_8 であるから、直角三角形とならないのは、 A_1 と A_5 , A_2 と A_6 , A_3 と A_7 , A_4 と A_8 をともに含まない場合である。直角三角形とならない4点の選び方は

$$\{A_1, A_5\}, \{A_2, A_6\}, \{A_3, A_7\}, \{A_4, A_8\}$$

の4組からそれぞれ1つずつ選ぶ場合の数 2^4 (個)

よって、求める場合の数は

$${}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = 54 \text{ (個)}$$



- 4 (1) 点 $R(a, a^3 - 2a)$ を通り、傾き 1 の直線 ℓ の方程式は

$$y - (a^3 - 2a) = x - a \quad \text{すなわち} \quad y = x + a^3 - 3a \quad (*)$$

ℓ と曲線 $y = x^3 - 2x$ の 2 式から y を消去すると

$$x^3 - 2x = x + a^3 - 3a \quad \text{ゆえに} \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$$

2 点 P, Q の x 座標は、方程式

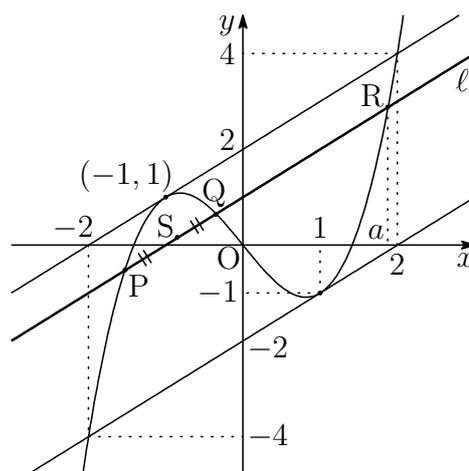
$$x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$$

解であり、これら 2 点の x 座標を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a$$

2 点 P, Q の中点の x 座標は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{a}{2}$$



S は ℓ 上の点であるから、その y 座標は $-\frac{a}{2} + a^3 - 3a = a^3 - \frac{7}{2}a$

よって、点 S の座標は $S\left(-\frac{a}{2}, a^3 - \frac{7}{2}a\right)$

- (2) $y = x^3 - 2x$ より $y' = 3x^2 - 2$

$y' = 1$ とすると $3x^2 - 2 = 1$ これを解いて $x = \pm 1$

(1) で示した図から $1 < a < 2$

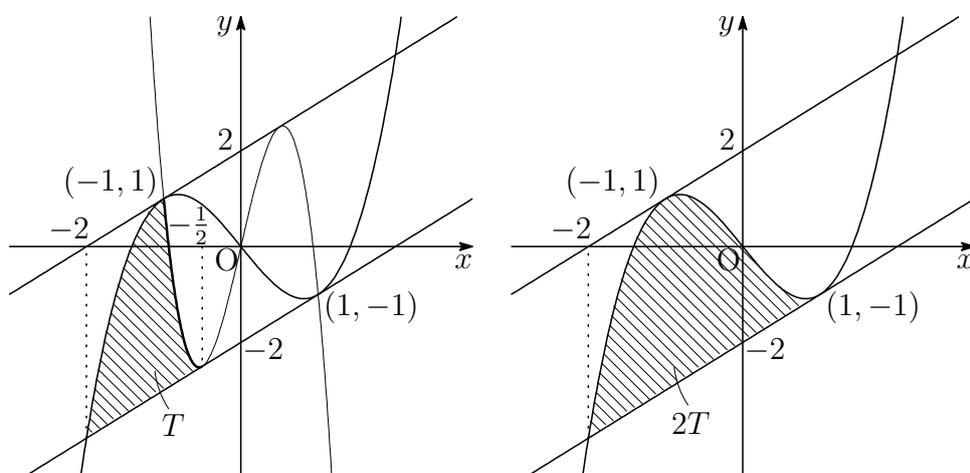
点 $S(x, y)$ の軌跡は、(1) の結果から

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = a^3 - \frac{7}{2}a \quad (1 < a < 2)$$

よって、求める軌跡の方程式は

$$\text{曲線 } y = -8x^3 + 7x \text{ の } -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ の部分}$$

(3) 線分 PS が動く領域 (左図) は, 線分 PQ が描く領域 (右図) の $\frac{1}{2}$ である.



$a = 1$ のとき, ℓ の方程式は, (*) より $y = x - 2$
 求める領域の面積を T とすると

$$\begin{aligned} 2T &= \int_{-2}^1 \{(x^2 - 2x) - (x - 2)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x + 2)(1 - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{12}(1 + 2)^4 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $T = \frac{27}{8}$

補足 積分公式¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010_kouki.pdf の 1 を参照.

- 5 (1) 3点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ が同一直線上にあるための z の必要十分条件は

$$z = 0 \quad \text{または} \quad \frac{z^2 - 0}{z - 0} = z \text{ が実数} \quad \text{すなわち} \quad z \text{ は実数}$$

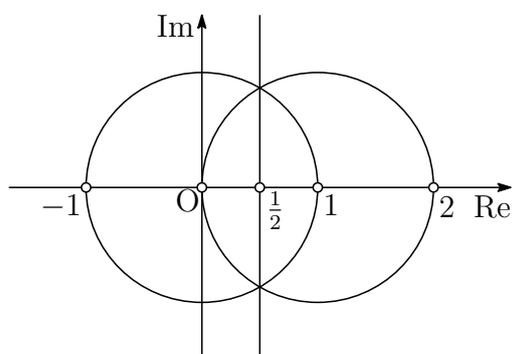
- (2) (1) の結果から, 3点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ が同一直線上にないとき, z は虚数であり, $OA = OB$, $OA = AB$, $OB = AB$ より

$$|z| = |z^2|, \quad |z| = |z^2 - z|, \quad |z^2| = |z^2 - z|$$

このとき, $|z| \neq 0$ であるから

$$|z| = 1, \quad |z - 1| = 1, \quad |z| = |z - 1| \quad (*)$$

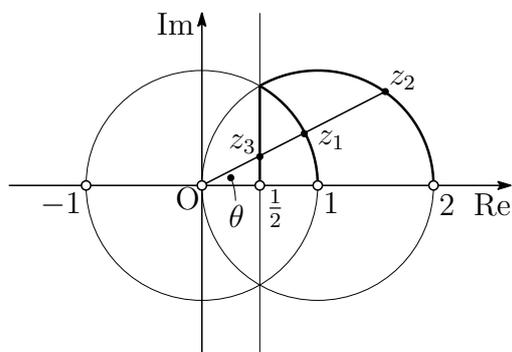
よって, z 全体の集合は, 下の図のとおりである. ただし o を除く.



- (3) $\angle AOB = \arg \frac{z^2 - 0}{z - 0} = \arg z = \theta$ であるから, $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |z| |z^2| \sin \theta = \frac{1}{2} |z|^3 \sin \theta$$

(2) の条件のもと, z の偏角 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ であるから, (*) の第1式から第3式上の点をそれぞれ z_1 , z_2 , z_3 とすると, これらの点は, 下の図のようになる. この θ に対して, $|z_3| \leq |z_1| \leq |z_2|$ であるから, S を最大にする $|z|$ を $|z| = |z_2| = 2 \cos \theta$ とすればよい.



したがって

$$S = \frac{1}{2}(2 \cos \theta)^3 \sin \theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta \quad \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

これを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= 4\{3 \cos^2 \theta(-\sin \theta) \sin \theta + \cos^3 \theta \cos \theta\} \\ &= 4 \cos^2 \theta(-3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^2 \theta(4 \cos^2 \theta - 3) \\ &= 4 \cos^2 \theta(2 \cos \theta + \sqrt{3})(2 \cos \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

これから S の増減表は、次のようになる。

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	-	
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

よって $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned} \text{このとき } z &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

補足 4 正数 $\cos^2 \theta$, $\cos^2 \theta$, $\cos^2 \theta$, $3 \sin^2 \theta$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{4} \geq \sqrt[4]{\cos^6 \theta \cdot 3 \sin^2 \theta}$$

両辺を平方すると, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ により

$$\frac{9}{16} \geq \sqrt{3} \cos^3 \theta \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad S = 4 \cos^3 \theta \sin \theta \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

上式において, 等号が成立するとき

$$\cos^2 \theta = 3 \sin^2 \theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$



6 (1) $I_k(a) = \int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!} e^x dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= - \int_0^a \left\{ \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!} \right\}' e^x dx \\ &= - \left[\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!} e^x \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!} (e^x)' dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a) - I_{k+1}(a) = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より, 正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{I_k(a) - I_{k+1}(a)\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$I_0(a) - I_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a) = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$ であるから

$$e^a - 1 - I_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!} \quad \text{ゆえに} \quad e^a = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} + I_n(a) \quad (*)$$

よって $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$

(2) $0 \leq x \leq a$ において, $1 \leq e^x \leq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!} \leq \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{(a-x)^n}{n!} e^a$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx &\leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx \\ - \left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a &\leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq -e^a \left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a \end{aligned}$$

よって $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) の結果から
$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq I_n(a) \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(*) から
$$I_n(a) = e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n(1) \leq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (**)$$

(**) の第 1 式から, $I_n(1) > 0$

(**) の第 2 式から, $I_n(1)$ は単調減少列である.

(**) の第 1 式に $n = 5, 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$

$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から $I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって, 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は $\mathbf{n = 6}$

解説 a を定数, n を自然数とする. $f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= - \int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t) dt \\ &= - \left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから, $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\ J_1(x) - J_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

$J_1(x) = \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M , 最小値を m とすると, $J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \text{ と } \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから, この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \quad c \in I$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する. $n = 1$ のとき, 平均値の定理により, 上式は成立する. したがって, すべての自然数について上式は成立する. ■