令和３年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 $a,\ b$ を実数とする．曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ．

2 $a,\ b$ を $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$ を満たす実数とする．平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a : 1 - a$ に内分する点を P，辺 BC を $b : 1 - b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする．

(1) $\dfrac{T}{S}$ を $a,\ b$ で表せ．

(2) $a,\ b$ が $0 < a < \dfrac{1}{2},\ 0 < b < \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $p,\ q$ を 3 以上の整数とし，$a = \dfrac{1}{p}$，$b = \dfrac{1}{q}$ とする．$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

3 正八角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A_8}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ．

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ．

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ．

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる．

4 座標平面において，次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ を考える．

$(*)$　ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる．

その交点を x 座標が小さなものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする．

(1) 点 R の座標を $(a,\ a^3 - 2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ．

(2) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ．

(3) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ z を複素数とする．複素数平面上の3点 O(0)，A(z)，B(z^2) について，以下の問いに答えよ．

(1) 3点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ．

(2) 3点 O，A，B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ．

(3) 3点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，曲線 $y=f(x)$ は，点 $(0,\ 1)$ を通る．

$a<0$ のとき，上に凸の放物線 $y=f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ．

したがって，$a \geqq 0$ であることが必要である．

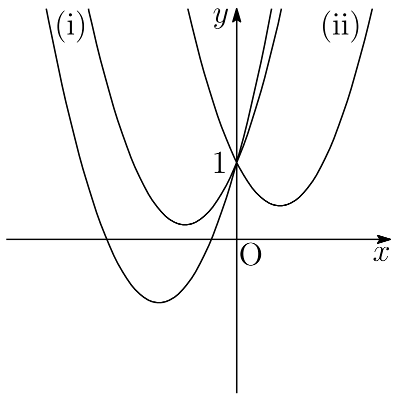
［1］$a=0$ のとき，直線 $y=bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geqq 0$$

［2］$a>0$ のとき，$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+1-\dfrac{b^2}{4a}$ より，放物線 $y=f(x)$ の頂点に着目すると，条件を満たすのは，次の (i) または (ii) である．

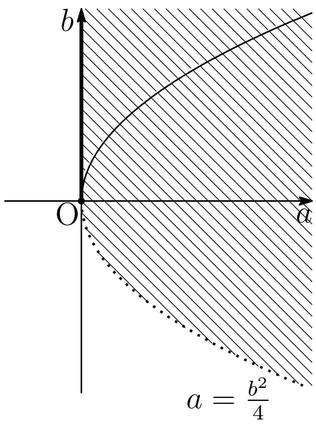
(i) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$

(ii) $-\dfrac{b}{2a}>0,\ 1-\dfrac{b^2}{4a}>0$

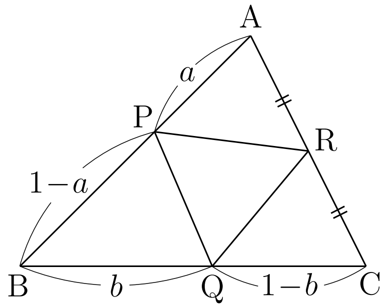


すなわち　(i) $b \geqq 0$　(ii) $b<0,\ a>\dfrac{b^2}{4}$

［1］,［2］より，求める領域は，下の図の斜線部分で，点線部分は含まない．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 右の図から



$$\triangle\mathrm{APR} = \frac{1}{2}aS$$
$$\triangle\mathrm{BQP} = (1-a)bS$$
$$\triangle\mathrm{CRQ} = \frac{1}{2}(1-b)S$$

したがって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= S - \triangle\mathrm{APR} - \triangle\mathrm{BQP} - \triangle\mathrm{CRQ} \\ &= S - \frac{1}{2}aS - (1-a)bS - \frac{1}{2}(1-b)S \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{T}{S} = ab - \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{T}{S} = \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{2} - a\right)\left(\dfrac{1}{2} - b\right)$

$0 < a < \dfrac{1}{2},\ 0 < b < \dfrac{1}{2}$ より　$0 < \dfrac{1}{2} - a < \dfrac{1}{2},\ 0 < \dfrac{1}{2} - b < \dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4} < \dfrac{T}{S} < \dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から　$2 < \dfrac{S}{T} < 4$　ゆえに　$\dfrac{S}{T}$ が整数となるとき　$\dfrac{S}{T} = 3$

$\dfrac{T}{S} = \dfrac{1}{3}$，$a = \dfrac{1}{p}$，$b = \dfrac{1}{q}$ を (1) の結果に代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}$$

整理すると　$pq - 3p - 3q + 6 = 0$　ゆえに　$(p-3)(q-3) = 3$

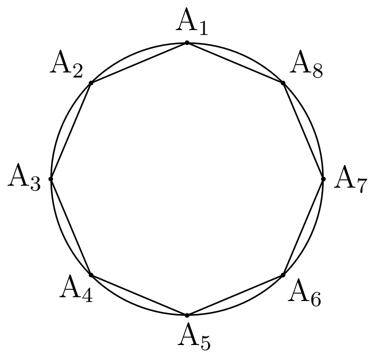
$p,\ q$ は，3 以上の整数であるから

$$(p-3,\ q-3) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (4,\ 6),\ (6,\ 4)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 直角三角形の斜辺は，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 の 4 通りあり，それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が 6 通りある．よって，求める個数は

$$4 \times 6 = \mathbf{24}\ (個)$$



(2) A_1 を挟む 2 辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$，$\triangle A_1A_4A_6$ の 2 個あるから，二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16\ (個)$$

(1) と上の結果から，直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40\ (個)$$

3 個の頂点を結んでできる三角形の総数は　${}_8C_3 = 56$ (個)

よって，求める個数は　　$56 - 40 = \mathbf{16}$ **(個)**

(3) 直角三角形の斜辺となるのは，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 であるから，直角三角形とならないのは，A_1 と A_5，A_2 と A_6，A_3 と A_7，A_4 と A_8 をともに含まない場合である．直角三角形とならない 4 点の選び方は

$$\{A_1,\ A_5\},\ \{A_2,\ A_6\},\ \{A_3,\ A_7\},\ \{A_4,\ A_8\}$$

の 4 組からそれぞれ 1 つずつ選ぶ場合の数　2^4 (個)
よって，求める場合の数は

$$ {}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = \mathbf{54}\ (個)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点 $\mathrm{R}(a,\ a^3-2a)$ を通り，傾き 1 の直線 ℓ の方程式は

$$y-(a^3-2a)=x-a \quad \text{すなわち} \quad y=x+a^3-3a \qquad (*)$$

ℓ と曲線 $y=x^3-2x$ の 2 式から y を消去すると

$$x^3-2x=x+a^3-3a \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$$

2 点 P，Q の x 座標は，方程式

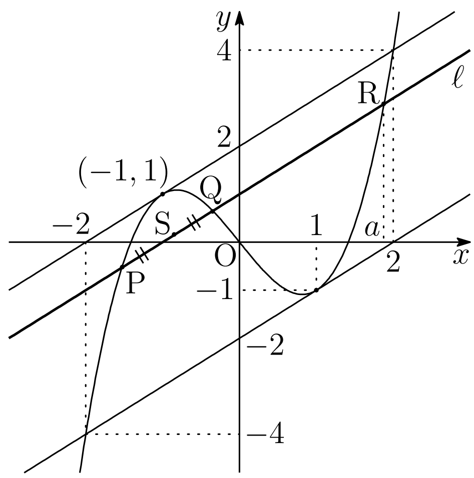
$$x^2+ax+a^2-3=0$$

解であり，これら 2 点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-a$$

2 点 P，Q の中点の x 座標は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{2}$$



S は ℓ 上の点であるから，その y 座標は $\quad -\frac{a}{2}+a^3-3a=a^3-\frac{7}{2}a$

よって，点 S の座標は $\quad \mathbf{S}\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}},\ \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}\right)$

(2) $y=x^3-2x$ より $\quad y'=3x^2-2$

$y'=1$ とすると $\quad 3x^2-2=1 \quad$ これを解いて $\quad x=\pm 1$

(1) で示した図から $\quad 1<a<2$

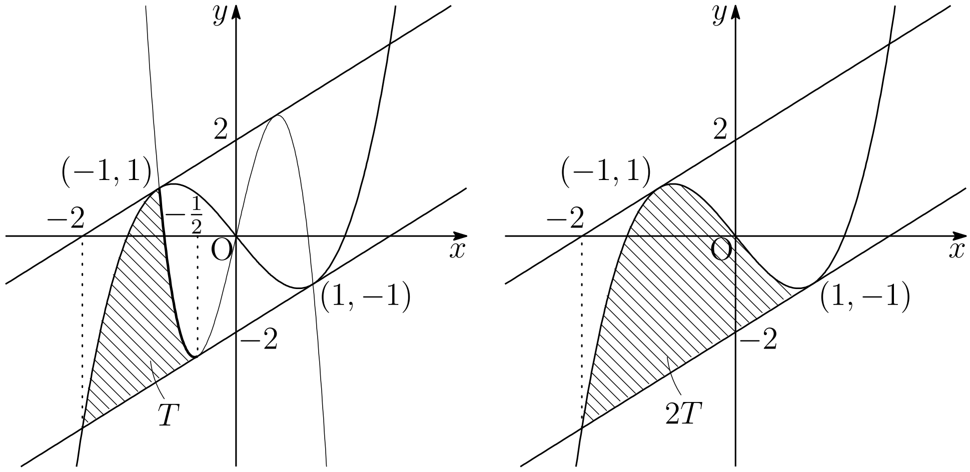
点 $\mathrm{S}(x,\ y)$ の軌跡は，(1) の結果から

$$x=-\frac{a}{2},\quad y=a^3-\frac{7}{2}a \quad (1<a<2)$$

よって，求める軌跡は

$$\textbf{曲線}\ \boldsymbol{y=-8x^3+7x}\ \textbf{の}\ \boldsymbol{-1<x<-\frac{1}{2}}\ \textbf{の部分}$$

(3) 線分 PS が動く領域 (左図) は，線分 PQ が描く領域 (右図) の $\dfrac{1}{2}$ である．



$a=1$ のとき，ℓ の方程式は，$(*)$ より　$y=x-2$

求める領域の面積を T とすると

$$\begin{aligned} 2T &= \int_{-2}^{1} \{(x^3-2x)-(x-2)\}dx \\ &= \int_{-2}^{1} (x+2)(1-x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{12}(1+2)^4 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

よって，求める面積は　　$T = \mathbf{\dfrac{27}{8}}$

補足 積分公式[1]

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 3点O(0)，A(z)，B(z^2) が同一直線上にあるための z の必要十分条件は

$$z = 0 \quad \text{または} \quad \frac{z^2-0}{z-0} = z \text{ が実数} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{z} \textbf{ は実数}$$

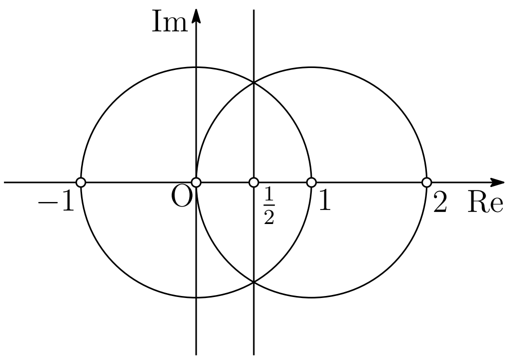
(2) (1) の結果から，3点O(0)，A(z)，B(z^2) が同一直線上にないとき，z は虚数であり，OA = OB, OA = AB, OB = AB より

$$|z| = |z^2|, \quad |z| = |z^2 - z|, \quad |z^2| = |z^2 - z|$$

このとき，$|z| \neq 0$ であるから

$$|z| = 1, \quad |z-1| = 1, \quad |z| = |z-1| \qquad (*)$$

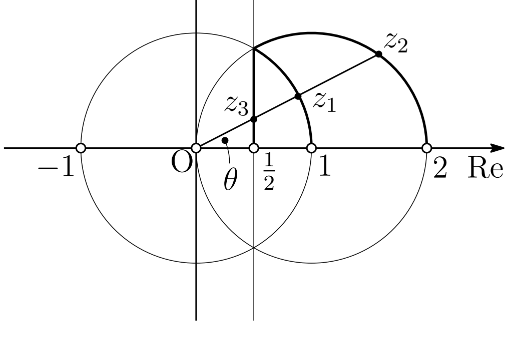
よって，z 全体の集合は，下の図のとおりである．ただし ∘ を除く．



(3) $\angle\text{AOB} = \arg\dfrac{z^2-0}{z-0} = \arg z = \theta$ であるから，△OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|z||z^2|\sin\theta = \frac{1}{2}|z|^3\sin\theta$$

(2) の条件のもと，z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$(*)$ の第1式から第3式上の点をそれぞれ z_1, z_2, z_3 とすると，これらの点は，下の図のようになる．この θ に対して，$|z_3| \leqq |z_1| \leqq |z_2|$ であるから，S を最大にする $|z|$ を $|z| = |z_2| = 2\cos\theta$ とすればよい．



したがって

$$S=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^3\sin\theta=4\cos^3\theta\sin\theta \quad \left(0<\theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

これを θ について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta}&=4\{3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta+\cos^3\theta\cos\theta\}\\&=4\cos^2\theta(-3\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=4\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)\\&=4\cos^2\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

これから S の増減表は，次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき　$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

補足 4 正数 $\cos^2\theta,\ \cos^2\theta,\ \cos^2\theta,\ 3\sin^2\theta$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{4} \geqq \sqrt[4]{\cos^6\theta\cdot 3\sin^2\theta}$$

両辺を平方すると，$0<\theta \leqq \frac{\pi}{3}$ により

$$\frac{9}{16} \geqq \sqrt{3}\cos^3\theta\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad S=4\cos^3\theta\sin\theta \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\cos^2\theta=3\sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= -\int_0^a \left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}' e^x\,dx \\ &= -\left[\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \\ I_0(a)-I_n(a) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!} \end{aligned}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!} \quad ゆえに \quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a) \qquad (*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx &\leqq \int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx \\ -\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a &\leqq \int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq -e^a\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a \end{aligned}$$

よって　$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) (2) の結果から $\qquad \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

$(*)$ から $\qquad I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a=1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

$(**)$ の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

$(**)$ の第 1 式に $n=5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から $\qquad I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は $\qquad \boldsymbol{n=6}$

解説 a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\ \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\ \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\ J_1(x) - J_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!}M \ \text{と}\ \frac{(x-a)^n}{n!}m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．