

令和2年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 $AB = 1, AC = 1, BC = \frac{1}{2}$ である $\triangle ABC$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC の交点を H とする.

- (1) $\angle BAC$ を θ と表すとき, $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ.
- (2) 実数 s は $0 < s < 1$ の範囲を動くとする. 辺 BH を $s : (1 - s)$ に内分する点を P とするとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ.

2 a を0でない実数とする. xy 平面において, 円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$, 直線 $L : -4x + 3y + a = 0$, 直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える.

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ.
- (2) C と L が異なる2つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点} P \text{は} C \text{と} L \text{の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点} P \text{は} C \text{と} M \text{の共有点}\}$ の要素の個数が3となるような a の値をすべて求めよ.

3 n を正の整数, a, b を0以上の整数とする.

- (1) $n \geq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ.
- (2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ.
- (3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ.

4 白玉3個, 赤玉2個の合計5個の玉が入った箱と硬貨がある. 箱から無作為に玉を1個取り出し, 硬貨を投げて表が出たら, その玉を手元に残し, 裏が出たら箱に戻す試行を行う. 試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する. また, 最初手元に玉はないものとする.

- (1) 2回の試行の結果, 手元に白玉が2個ある確率を求めよ.
- (2) 3回の試行の結果, 手元の玉が白玉1個, 赤玉1個の計2個となる確率を求めよ.
- (3) n を5以上の整数とし, ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ.
- (4) (3)の確率 p_n が最大となる n を求めよ.

5 実数 t に対して複素数 $z = \frac{-1}{t+i}$ を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) 絶対値 $\left| z - \frac{i}{2} \right|$ を求めよ。
- (3) 実数 t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、点 z はどのような図形を描くか、複素数平面上に図示せよ。

6 正の整数 m, n に対して実数 $A(m, n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

- (2) $A(m, 1)$ を求めよ。
- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

- (4) m または n が奇数ならば、 $A(m, n)$ は有理数であることを示せ。

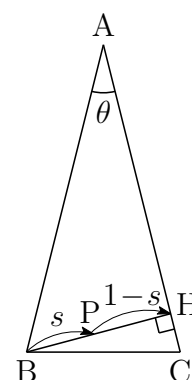
解答例

- 1 (1) $AB = AC = 1$, $BC = \frac{1}{2}$ であるから, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{1 + 1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

$\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$



- (2) (1) の結果から, $AH = AB \cos \theta = \frac{7}{8}$, $HB = AB \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$
点 P は辺 BH を $s : (1 - s)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \vec{AH} + (1 - s)\vec{HB}, & \vec{BP} &= -s\vec{HB}, \\ \vec{CP} &= -\frac{1}{7}\vec{AH} + (1 - s)\vec{HB}\end{aligned}$$

$|\vec{AH}| = \frac{7}{8}$, $|\vec{HB}| = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\vec{AH} \cdot \vec{HB} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}AP^2 + BP^2 + CP^2 &= |\vec{AP}|^2 + |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2 \\ &= |\vec{AH}|^2 + (1 - s)^2 |\vec{HB}|^2 + s^2 |\vec{HB}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{49} |\vec{AH}|^2 + (1 - s)^2 |\vec{HB}|^2 \\ &= \frac{49}{64} + \frac{15}{64} (1 - s)^2 + \frac{15}{64} s^2 + \frac{1}{49} \cdot \frac{49}{64} + \frac{15}{64} (1 - s)^2 \\ &= \frac{15}{64} \{2(1 - s)^2 + s^2\} + \frac{25}{32} \\ &= \frac{45}{64} \left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15}{16}\end{aligned}$$

よって $s = \frac{2}{3}$ のとき 最小値 $\frac{15}{16}$ ■

- 2 (1) 円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ より $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2$
 円 C は, 中心 $(a, 2)$, 半径 $|a|$ の円である.

$L: -4x + 3y + a = 0$, $M: 3x + 4y - 7a = 0$ の交点は
 これらの2式を連立して解くと (a, a)
 これが円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 上にあるから

$$(a - a)^2 + (a - 2)^2 = a^2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

- (2) C の中心 $(a, 2)$ から直線 $L: -4x + 3y + a = 0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1 = \frac{|-4a + 6 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-3a + 6|}{5}$$

C と L が異なる2つの共有点をもつとき, $d_1 < |a|$ であるから

$$\frac{|-3a + 6|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a - 6)^2 < (5a)^2$$

したがって $(a + 3)(4a - 3) > 0$ を解いて $a < -3$, $\frac{3}{4} < a$

- (3) C の中心 $(a, 2)$ から直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2 = \frac{|3a + 8 - 7a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4a + 8|}{5}$$

C と M が異なる2つの共有点をもつとき, $d_2 < |a|$ であるから

$$\frac{|-4a + 8|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a - 8)^2 < (5a)^2$$

したがって $(a + 8)(9a - 8) > 0$ を解いて $a < -8$, $\frac{8}{9} < a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした, すなわち, $a = -3$, $\frac{3}{4}$, -8 , $\frac{8}{9}$ のとき, それぞれ円と直線が1点を共有する(1点で接する).

- (i) C と L が2点を共有し, C と M が1点を共有するのは $a = -8$, $\frac{8}{9}$
 (ii) C と L が1点を共有し, C と M が2点を共有する a は存在しない.
 (iii) (1) の結果から, $a = 1$ のとき, C と L は2点を共有し, 同時に C と M も2点を共有する. このとき, その1点は C, L, M によって共有されるので, $a = 1$ は条件を満たす.

(i)~(iii) から, 求める a の値は $a = -8, \frac{8}{9}, 1$ ■

3 (1) $2^n + n^2 + 8 < 3^n \quad \dots (*)$

[1] $n = 3$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 2^3 + 3^2 + 8 = 25, \quad (*) \text{ の右辺} = 3^3 = 27$$

したがって、このとき、 $(*)$ は成立する。

[2] $n = k$ のとき、すなわち、 $2^k + k^2 + 8 < 3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} &> 3(2^k + k^2 + 8) - 2^{k+1} - (k+1)^2 - 8 \\ &= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\ &= 2^k + k^2 + (k-1)^2 + 14 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad 2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$$

したがって、 $n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

[1], [2] より、 $n \geq 3$ に対して、 $(*)$ が成立する。

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n + n^2 + 8 \geq 3^n \quad \dots (**)$$

を満たす $n \geq 3$ の整数は存在しないから、 $n = 1, 2$ について調べればよい。

- $n = 1$ のとき、 $2^1 + 1^2 + 8 \geq 3^1$ より、 $(**)$ は成立する。
- $n = 2$ のとき、 $2^2 + 2^2 + 8 \geq 3^2$ より、 $(**)$ は成立する。

よって $n = 1, 2$

(3) (1) の結果から、 $n \geq 3$ のとき $3^n - (2^n + n^2 + 8) > 0$

また、与えられた等式から $3^n - (2^n + n^2 + 8) = -an - b$

上の2式から $-an - b > 0$ ゆえに $an + b < 0 \quad \dots (A)$

a, b は0以上の整数であるから、 $n \geq 3$ のとき、 (A) を満たす (a, b, n) は存在しない。したがって、 $n = 1, 2$ について調べればよい。

(i) $n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b$ ゆえに $a + b = 8 \quad \dots \textcircled{1}$

(ii) $n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b$ ゆえに $2a + b = 7 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $(a, b, n) = (j, 8 - j, 1) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 8),$
 $(a, b, n) = (k, 7 - 2k, 2) \quad (k = 0, 1, 2, 3)$



- 4 (1) 箱から白玉を2回連続して取り出し、同時に硬貨は2回とも表が出る確率であるから

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{40}$$

- (2) 白玉1個と赤玉1個が取り出される確率は、取り出される順番に関係なく

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4}$$

白玉1個、赤玉1個が取り出され(ともに硬貨は表)、硬貨が裏である確率であり、それらが起きる場合の総数3!通りあるから

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3! = \frac{9}{40}$$

- (3) $n-1$ 回目までに硬貨がちょうど4回表が出て、 n 回目に表が出る確率であるから

$$p_n = {}_{n-1}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6 \cdot 2^{n+2}}$$

- (4) (3)の結果から

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6 \cdot 2^{n+3}} \times \frac{6 \cdot 2^{n+2}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \\ &= \frac{n}{2(n-4)} \end{aligned}$$

したがって $\frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \frac{8-n}{2(n-4)}$

ゆえに $p_5 < p_6 < p_7 < p_8 = p_9 > p_{10} > \dots$

よって、 p_n が最大となる n は $n = 8, 9$ ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad z = \frac{-1}{t+i} = -\frac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)} = -\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}i$$

$$\text{よって 実部 } -\frac{t}{t^2+1}, \text{ 虚部 } \frac{1}{t^2+1}$$

$$(2) \quad z - \frac{i}{2} = \frac{-1}{t+i} - \frac{i}{2} = \frac{-2-i(t+i)}{2(t+i)} = \frac{-1-ti}{2(t+i)}$$

$$\text{よって } \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{|-1-ti|}{2|t+i|} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}$$

(3) (1) で求めた実部と虚部をそれぞれ x , y とおくと

$$x = -\frac{t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2}$$

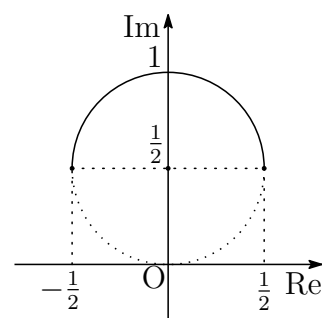
$-1 \leq t \leq 1$ より, $t = \tan \theta$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

したがって $x = -\frac{1}{2} \sin 2\theta$, $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$

$$\begin{aligned} x + yi &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) i = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より, $0 \leq 2\theta + \frac{\pi}{2} \leq \pi$ であるから, $z = x + yi$ の描く図形は右の図の実線部分である.



補足 $t = \tan \theta$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1}{\tan \theta + i} = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta + i \cos \theta} = \frac{i \cos \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \\ &= i \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$



6 (1) $A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$ において, $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = -1, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \theta & \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (-d\theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta = A(n, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(m+2, n) + A(m, n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx = A(m, n) \end{aligned}$$

$$(2) A(m, 1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin x dx = \left[-\frac{\cos^{m+1} x}{m+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m+1}$$

(3) $A(m, n)$ の定義により

$$\begin{aligned} A(m, n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x dx \\ &= -\frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(m+1) \cos^m x (-\sin x)\} \sin^{n+1} x dx \\ &= -\frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos^{m+1} x\}' \sin^{n+1} x dx \\ &= -\frac{1}{m+1} \left[\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x \cdot (n+1) \sin^n x \cos x dx \\ &= \frac{n+1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x dx = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n) \end{aligned}$$

(4) m または n が奇数であるから, (1) の $A(m, n) = A(n, m)$ により, n が奇数の場合について証明する. (2),(3) の結果から

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{n-1}{m+1} A(m+2, n-2) \\ &= \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} A(m+4, n-4) \\ &= \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} \cdots \frac{2}{m+n-2} A(m+n-1, 1) \\ &= \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} \cdots \frac{2}{m+n-2} \cdot \frac{1}{m+n} \end{aligned}$$

よって, $A(m, n)$ は有理数である.

発展 $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を利用する.

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

において, $t = \sin^2 x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2 \sin x \cos x$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} (2 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{\frac{m-1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{2 \cdot \frac{m+n}{2}!} \end{aligned}$$

例えば $A(2, 5) = \frac{\frac{1}{2}! 2!}{2 \cdot \frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!} = \frac{1}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8}{105}$

$$A(2, 6) = \frac{\frac{1}{2}! \frac{5}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{\frac{1}{2}! \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{5}{64} \left(\frac{1}{2}! \right)^2$$

これに $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると¹ $A(2, 6) = \frac{5}{256} \pi$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri-2020.pdf (p.8 を参照)