令和２年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC の交点を H とする．

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする．辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ．

2 a を 0 でない実数とする．xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える．

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ．

3 n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする．

(1) $n\geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8<3^n$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $2^n+n^2+8\geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) 等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす $a,\ b,\ n$ の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ．

4 白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある．箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う．試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する．また，最初手元に玉はないものとする．

(1) 2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ．

(2) 3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ．

(3) n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ．

(4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) 絶対値 $\left|z - \dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ．

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 正の整数 $m,\ n$ に対して実数 $A(m,\ n)$ を次の定積分で定める．

$$A(m,\ n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\, dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n) = A(n,\ m), \quad A(m+2,\ n) + A(m,\ n+2) = A(m,\ n)$$

(2) $A(m,\ 1)$ を求めよ．

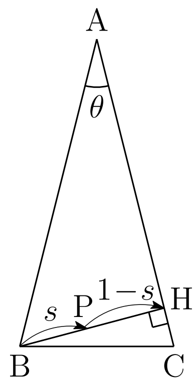
(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$A(m,\ n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,\ n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}\\ &= \frac{1+1-\frac{1}{4}}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

(2) (1) の結果から，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\theta=\dfrac{7}{8}$，$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

点 P は辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=-s\overrightarrow{\mathrm{HB}},\\ &\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{HB}}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{7}{8}$，$|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\ &\qquad +\frac{1}{49}|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|^2\\ &= \frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{49}\cdot\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2\\ &= \frac{15}{64}\{2(1-s)^2+s^2\}+\frac{25}{32}\\ &= \frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{s=\dfrac{2}{3}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{15}{16}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ より　$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

円 C は，中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である．

$L: -4x+3y+a=0$，$M: 3x+4y-7a=0$ の交点は

これらの 2 式を連立して解くと　$(a,\ a)$

これが円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ 上にあるから

$$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1}$$

(2) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $L: -4x+3y+a=0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1=\frac{|-4a+6+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-3a+6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_1<|a|$ であるから

$$\frac{|-3a+6|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a-6)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+3)(4a-3)>0$　これを解いて　$\boldsymbol{a<-3,\ \frac{3}{4}<a}$

(3) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $M: 3x+4y-7a=0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2=\frac{|3a+8-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-4a+8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_2<|a|$ であるから

$$\frac{|-4a+8|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a-8)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+8)(9a-8)>0$　これを解いて　$a<-8,\ \frac{8}{9}<a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした，すなわち，$a=-3,\ \frac{3}{4}, -8,\ \frac{8}{9}$ のとき，それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)．

(i) C と L が 2 点を共有し，C と M が 1 点を共有するのは　$a=-8,\ \frac{8}{9}$

(ii) C と L が 1 点を共有し，C と M が 2 点を共有する a は存在しない．

(iii) (1) の結果から，$a=1$ のとき，C と L は 2 点を共有し，同時に C と M も 2 点を共有する．このとき，その 1 点は C，L，M によって共有されるので，$a=1$ は条件を満たす．

(i)〜(iii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a=-8,\ \frac{8}{9},\ 1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$2^n + n^2 + 8 < 3^n \quad \cdots (*)$$

［1］$n = 3$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 2^3 + 3^2 + 8 = 25, \quad (*) \text{ の右辺} = 3^3 = 27$$

したがって，このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，すなわち，$2^k + k^2 + 8 < 3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} &> 3(2^k + k^2 + 8) - 2^{k+1} - (k+1)^2 - 8 \\ &= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\ &= 2^k + k^2 + (k-1)^2 + 14 > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　　$2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，$n \geqq 3$ に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n \quad \cdots (**)$$

を満たす $n \geqq 3$ の整数は存在しないから，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

- $n = 1$ のとき，$2^1 + 1^2 + 8 \geqq 3^1$ より，$(**)$ は成立する．
- $n = 2$ のとき，$2^2 + 2^2 + 8 \geqq 3^2$ より，$(**)$ は成立する．

よって　　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$

(3) (1) の結果から，$n \geqq 3$ のとき　$3^n - (2^n + n^2 + 8) > 0$

また，与えられた等式から　$3^n - (2^n + n^2 + 8) = -an - b$

上の 2 式から　$-an - b > 0$　ゆえに　$an + b < 0 \quad \cdots$(A)

$a,\ b$ は 0 以上の整数であるから，$n \geqq 3$ のとき，(A) を満たす $(a,\ b,\ n)$ は存在しない．したがって，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

(i) $n = 1$ のとき　$2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b$　　ゆえに　$a + b = 8 \quad \cdots$①

(ii) $n = 2$ のとき　$2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b$　ゆえに　$2a + b = 7 \quad \cdots$②

①，② より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (j,\ 8 - j,\ 1)\ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, 8)}$,
$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (k,\ 7 - 2k,\ 2)\ \ (k = 0, 1, 2, 3)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 箱から白玉を 2 回連続して取り出し，同時に硬貨は 2 回とも表が出る確率であるから

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{3}{40}}$$

(2) 白玉 1 個と赤玉 1 個が取り出される確率は，取り出される順番に関係なく

$$\frac{3\cdot2}{5\cdot4}$$

白玉 1 個，赤玉 1 個が取り出され (ともに硬貨は表)，硬貨が裏である確率であり，それらが起きる場合の総数 3! 通りあるから

$$\frac{3\cdot2}{5\cdot4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot3!=\mathbf{\frac{9}{40}}$$

(3) $n-1$ 回目までに硬貨がちょうど 4 回表が出て，n 回目に表が出る確率であるから

$$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6\cdot2^{n+2}}}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n}&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6\cdot2^{n+3}}\times\frac{6\cdot2^{n+2}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\\&=\frac{n}{2(n-4)}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}-1=\dfrac{8-n}{2(n-4)}$

ゆえに　$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>\cdots$

よって，p_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n=8,\ 9}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $z = \dfrac{-1}{t+i} = -\dfrac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)} = -\dfrac{t}{t^2+1} + \dfrac{1}{t^2+1}i$

よって　実部 $\boldsymbol{-\dfrac{t}{t^2+1}}$，虚部 $\boldsymbol{\dfrac{1}{t^2+1}}$

(2) $z - \dfrac{i}{2} = \dfrac{-1}{t+i} - \dfrac{i}{2} = \dfrac{-2-i(t+i)}{2(t+i)} = \dfrac{-1-ti}{2(t+i)}$

よって　$\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{|-1-ti|}{2|t+i|} = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{t^2+1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) で求めた実部と虚部をそれぞれ x，y とおくと

$$x = -\frac{t}{1+t^2},\quad y = \frac{1}{1+t^2}$$

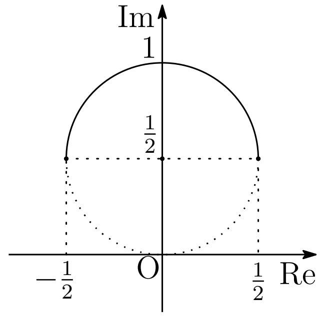
$-1 \leqq t \leqq 1$ より，$t = \tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

したがって　$x = -\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，$y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}
x + yi &= -\frac{1}{2}\sin 2\theta + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)i = \frac{i}{2} - \frac{1}{2}(\sin 2\theta - i\cos 2\theta) \\
&= \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\} \\
&= \frac{i}{2} + \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)\left\{\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\left\{\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{2} \leqq \pi$ であるから，$z = x + yi$ の描く図形は右の図の実線部分である．



補足　$t = \tan\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-1}{\tan\theta + i} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta + i\cos\theta} = \frac{-\cos\theta(\sin\theta - i\cos\theta)}{(\sin\theta + i\cos\theta)(\sin\theta - i\cos\theta)} \\
&= -\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta = -\frac{1}{2}\sin 2\theta + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $A(m,\ n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-1,\qquad \begin{array}{c||c} x & 0\longrightarrow\frac{\pi}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(m,\ n)&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-d\theta) \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta=A(n,\ m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx \\ &\qquad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx=A(m,\ n) \end{aligned}$$

(2) $A(m,\ 1)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx=\left[-\frac{\cos^{m+1}x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{m+1}}$

(3) $A(m,\ n)$ の定義により

$$\begin{aligned} A(m,\ n+2)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx \\ &=-\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(m+1)\cos^m x(-\sin x)\}\sin^{n+1}x\,dx \\ &=-\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos^{m+1}x\}'\sin^{n+1}x\,dx \\ &=-\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad+\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}x\cdot(n+1)\sin^n x\cos x\,dx \\ &=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n) \end{aligned}$$

(4) m または n が奇数であるから，(1) の $A(m,\ n)=A(n,\ m)$ により，n が奇数の場合について証明する．(2),(3) の結果から

$$\begin{aligned}A(m,\ n)&=\frac{n-1}{m+1}A(m+2,\ n-2)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}A(m+4,\ n-4)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,1)\\&=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdots\frac{2}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n}\end{aligned}$$

よって，$A(m,\ n)$ は有理数である．

発展 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を利用する．

$$A(m,\ n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

において，$t=\sin^2 x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}A(m,\ n)&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}(\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin x\cos x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{\frac{m-1}{2}}t^{\frac{n-1}{2}}\,dt=\frac{\frac{m-1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}{2\cdot\frac{m+n}{2}!}\end{aligned}$$

例えば $\displaystyle A(2,\ 5)=\frac{\frac{1}{2}!2!}{2\cdot\frac{7}{2}!}=\frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!}=\frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}=\frac{1}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{8}{105}$

$$A(2,\ 6)=\frac{\frac{1}{2}!\frac{5}{2}!}{2\cdot 4!}=\frac{\frac{1}{2}!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}{2\cdot 4!}=\frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$$

これに $\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると[1] $\quad A(2,\ 6)=\dfrac{5}{256}\pi$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)