平成31年度　東北大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ．

2 a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n = 6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

3 a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $a > 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ．

(2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ．

4 実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す．

(1) $[2x^2+x+3]$, $[x^5-1]$, $[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ．

(2) 整式 $A(x)$, $B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$[(x\sin\theta + \cos\theta)^2] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

$$[(ax+b)^4] = -1$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1)f(t)\,dt$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す．初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする．この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする．2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ．

(2) $p(n,\ 1)$ を求めよ．

(3) $p(n,\ 2)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y=\sin x$ より　$y'=\cos x$

曲線 $y=\sin x$ 上の2点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \sin\beta)$ とすると，A，B における接線の傾きは，それぞれ $\cos\alpha$，$\cos\beta$ であるから，これらの接線が直交するとき

$$\cos\alpha\cos\beta=-1$$

これから，一般性を失うことなく，$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=-1$ とおくと

$$\alpha=2k\pi,\ \beta=(2l+1)\pi \qquad (k,\ l \text{ は整数})$$

曲線 $y=\sin x$ 上の点 A における接線の方程式は

$$y=1(x-2k\pi) \quad \text{すなわち} \quad y=x-2k\pi \quad \cdots①$$

曲線 $y=\sin x$ 上の点 B における接線の方程式は

$$y=-1\{x-(2l+1)\pi\} \quad \text{すなわち} \quad y=-x+(2l+1)\pi \quad \cdots②$$

①，② より，x を消去すると

$$2y=(2l-2k+1)\pi \quad \text{ゆえに} \quad y=\left(l-k+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$n=l-k$ とおくと，n は整数であるから，求める交点の y 座標は

$$\boldsymbol{y=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $n=6$ より　　$\log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$　$\cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-6>0,\ 12-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 6<x<12 \quad \cdots ①$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ より　　$(x-6)^2 > 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)>0$　すなわち　$x<3,\ 8<x$　$\cdots②$

よって，①，② を同時に満たす整数 x は　　**9，10，11**

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ より　　$(x-6)^2 < 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)<0$　すなわち　$3<x<8$　$\cdots③$

よって，①，③ を同時に満たす整数 x は　　**7**

(2)　　$\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$　$\cdots(**)$

真数は正であるから

$$x-n>0,\ 2n-x>0 \quad \text{すなわち} \quad n<x<2n \quad \cdots ④$$

(i) $a>1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 > 2n-x$

ゆえに　　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$f(x)=x^2+(1-2n)x+n^2-2n$ とおくと

$$f(x)=\left(x-n+\frac{1}{2}\right)^2-n-\frac{1}{4}$$

$$f(n)=-n<0, \quad f(2n)=n^2>0 \qquad (n\text{ は正の整数})$$

これから，④ と 2 次不等式 $f(x)>0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 < 2n-x$

ゆえに　　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n<0$

同様に，④ と 2 次不等式 $f(x)<0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1)=-n+2<0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(i)，(ii) より，求める n についての必要十分条件は　　$\boldsymbol{n>2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(*)\quad x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$x_1=a>0$．$x_n>0$ のとき，漸化式より $x_{n+1}>0$

したがって，すべての自然数 n について　$x_n>0$

$(**)\quad x_{n+1}-x_n={x_n}^2>0$ より，$\{x_n\}$ は単調増加列であるから

$$x_{n+1}=(1+x_n)x_n\geqq(1+a)x_n\quad したがって\quad x_n\geqq a(1+a)^{n-1}$$

$a>0$，$1+a>1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(1+a)^n=\infty$　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=\infty}$

(2) $-1<a<0$ より，$-1<x_1<0$．

$-1<x_n<0$ と仮定すると，$0<1+x_n<1$ および $(*)$ より

$$x_{n+1}=x_n(1+x_n)\quad ゆえに\quad -1<x_{n+1}<0$$

よって，すべての自然数 n に対して　$-1<x_n<0$

(3) $(*)$ および (2) の結果から

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n(1+x_n)}-\frac{1}{x_n}=-\frac{1}{1+x_n}<-1$$

$n>1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}}-\frac{1}{x_k}\right)<-\sum_{k=1}^{n-1}\quad ゆえに\quad \frac{1}{x_n}<\frac{1}{a}-n+1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}-n+1\right)=-\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=0}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2x^2+x+3=2(x^2+1)+x+1$ より　$[2x^2+x+3]=\boldsymbol{x+1}$

$x^5-1=(x^2+1)(x^3-x)+x-1$ より　$[x^5-1]=\boldsymbol{x-1}$

したがって　$[2x^2+x+3][x^5-1]=(x+1)(x-1)=(x^2+1)-2$

よって　$[[2x^2+x+3][x^5-1]]=\boldsymbol{-2}$

(2) $A(x)=(x^2+1)P(x)+[A(x)]$，$B(x)=(x^2+1)Q(x)+[B(x)]$ とすると

$$A(x)B(x)=(x^2+1)\{(x^2+1)P(x)Q(x)+[A(x)]Q(x)+[B(x)]P(x)\}\\+[A(x)][B(x)]$$

よって　$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$

(3)
$$\begin{aligned}(x\sin\theta+\cos\theta)^2&=x^2\sin^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(x^2+1)\sin^2\theta+x\sin2\theta+\cos2\theta\end{aligned}$$

よって　$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin2\theta+\cos2\theta$

(4) (2) の結果において，$B(x)=A(x)$ とすると　$[A(x)^2]=[[A(x)]^2]$

さらに　$[A(x)^2A(x)^2]=[[A(x)^2][A(x)]^2]$　ゆえに　$[A(x)^4]=[[A(x)]^4]$

$A(x)=x\sin\theta+\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$，$ax+b=rA(x)$ $(r>0)$ とおくと，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}[(ax+b)^4]&=[\{rA(x)\}^4]=r^4[[A(x)]^4]=r^4[([x\sin\theta+\cos\theta]^2)^2]\\&=r^4[(x\sin2\theta+\cos2\theta)^2]=r^4(x\sin4\theta+\cos4\theta)=-1\end{aligned}$$

したがって　$r^4=1$，$4\theta=(2k-1)\pi$

ゆえに　$r=1$，$\theta=\dfrac{2k-1}{4}\pi$ $(k=1,2,3,4)$，$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$　**(複号任意)**

5 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$　$\cdots$①

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$ について，$x=-t$ とすると　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$-1\longrightarrow0$
t	$1\longrightarrow0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx&=\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}\,(-dt)=\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^{-t}}\,dt\\&=\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx&=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{(e^x+1)\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-\cos2\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\,\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件式から

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(2+e^x)\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$$

$A=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$，$B=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+e^t)f(t)\,dt$ とおくと

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(2+e^x)A-B \qquad \cdots(*)$$

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{2+e^x}{1+e^x}A-\frac{1}{1+e^x}B \qquad \cdots(**)$$

ここで

$$\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(2-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[\,2x-\log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1}=3$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\Big[\,x-\log(1+e^x)\,\Big]_{-1}^{1}=1$$

上式および (1) の結果を利用すると，$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
B&=\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx+A\int_{-1}^{1}(2+e^x)\,dx-B\int_{-1}^{1}dx\\
&=\frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\,\Big]_{-1}^{1}+A\Big[\,2x+e^x\,\Big]_{-1}^{1}-2B\\
&=1+(4+e-e^{-1})A-2B,\\
A&=\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx+A\int_{-1}^{1}\frac{2+e^x}{1+e^x}\,dx-B\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}\,dx\\
&=\frac{1}{2}+3A-B
\end{aligned}$$

整理すると　$(4+e-e^{-1})A-3B+1=0$，$2A-B+\dfrac{1}{2}=0$

これを解いて　$A=\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$，$B=\dfrac{e^2-1}{2(e^2-2e-1)}$

$(**)$ より

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+A+\frac{A-B}{1+e^x}\\
&=\boldsymbol{\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{1}{2(e^2-2e-1)}\left(e-\frac{e^2-e-1}{1+e^x}\right)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 試行を $n+1$ 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で 2 個であるのは，次の場合である．

(i) n 回目までに赤玉が全部で 2 個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている中から白玉を取り出す．

(ii) n 回目までに赤玉が全部で 1 個であり，$n+1$ 回目に袋の中にある赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている中から赤玉を取り出す．

よって
$$\begin{aligned} p(n+1,\ 2) &= p(n,\ 2)\times\frac{7}{10}+p(n,\ 1)\times\frac{4}{10} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}p(n,\ 1)} \end{aligned}$$

(2) 赤玉 1 個を k 回目に取り出す確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} p(n,\ 1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^k=\left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{5}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\right)^n\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+\frac{2}{5}\times 5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$p(n+1,2)-\frac{7}{10}p(n,\ 2)=2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$\left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}p(n+1,\ 2)-\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)=\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

ここで，$n \geqq 2$ について，$q_n=\left(\dfrac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2)$ とおくと

$$q_{n+1}-q_n=\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$
$$q_2=\left(\frac{10}{7}\right)^2 p(2,\ 2)=\frac{100}{49}\times\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{20}{49}$$

$n > 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n-1}(q_{k+1} - q_k) = \frac{20}{7}\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^k - \left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$$

$$q_n - q_2 = \frac{20}{7}\left\{\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^n}{1-\frac{6}{7}} - \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}{1-\frac{5}{7}}\right\}$$

上式は，$n = 2$ のときも成立するから，$n \geqq 2$ について

$$q_n - \frac{20}{49} = 20\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right\} - 10\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$$q_n = 10\left\{1 - 2\left(\frac{6}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

したがって

$$\left(\frac{10}{7}\right)^n p(n,\ 2) = 10\left\{1 - 2\left(\frac{6}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$$p(n,\ 2) = \boldsymbol{10\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$

例えば　$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}}{1 - \frac{6}{7}}$$