平成 30 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面における 2 つの放物線 $C : y = (x-a)^2 + b$，$D : y = -x^2$ を考える．

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ．

2 n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする．箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている．この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す．ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする．

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ．

(2) $p(2)$ を求めよ．

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ．

3 整数 a，b は等式

$$3^a - 2^b = 1 \quad \cdots ①$$

を満たしているとする．

(1) $a,\ b$ はともに正となることを示せ．

(2) $b > 1$ ならば，a は偶数であることを示せ．

(3) ① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ．

4 三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする．また，$\angle\mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{B} = 2\beta$，$\angle\mathrm{C} = 2\gamma$ とおく．

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ．

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

5 α を複素数とする．複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

(2) 方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする．原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

6 xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \\ x - y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える．図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

(1) S を xy 平面に図示せよ．

(2) V を求めよ．

解答例

1 (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると　$2x^2-2ax+a^2+b=0$

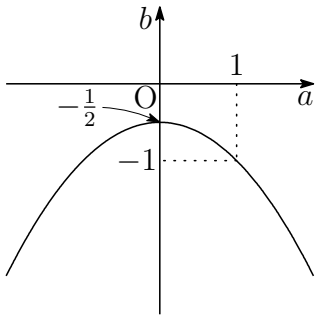
2 交点の x 座標は　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$　$\cdots$①

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a+\sqrt{-a^2-2b}}{2}-\frac{a-\sqrt{-a^2-2b}}{2}=1$$

ゆえに　$\sqrt{-a^2-2b}=1$　$\cdots$②

よって　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}}$　(右図)



(2) 2 交点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$ とすると，①，② より

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\frac{a+1}{2}\quad\cdots(*)$$

2 交点は D 上の点であるから，$\mathrm{A}(\alpha,-\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,-\beta^2)$ とする．

2 点 A，B を通る直線 l の方程式は　$y+\alpha^2=\dfrac{-\beta^2+\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

ゆえに　$y=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$　$(*)$ により　$l: y=-ax+\dfrac{a^2-1}{4}$

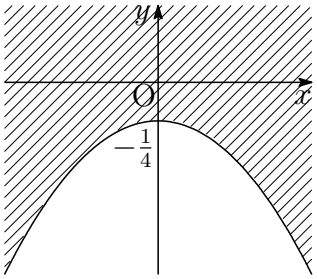
直線 l の方程式を a について整理すると

$$a^2-4xa-4y-1=0\quad\cdots(**)$$

直線 l が通過する点 $(x,\ y)$ は，a に関する 2 次方程式 $(**)$ が実数解をもつときであるから，$(**)$ の係数について

$$D/4=(-2x)^2-1\cdot(-4y-1)\geqq 0$$

したがって　$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$



よって，求める領域は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ の上側で，境界線を含む (上図)．

補足 C，D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x-a)^2-y+b+k(x^2+y)=0$$

$k\neq -1$ のとき放物線，$k=-1$ のとき直線となるから，$k=-1$ より

$$(x-a)^2-y+b-(x^2+y)=0\quad \text{すなわち}\quad y=-ax+\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると，直線 l の方程式を得る．　■

2 (1) $p(1)$ は，1 回で札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

$p(n)$ は，n 回目で初めて札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目から $n-1$ 回目まで 1 の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{n^{n-1}}}$$

(2) 1 回目が k の札を取り出すとすると $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$，2 回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(2) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) &= \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2n^2}(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) 2 回目の試行の直後，取り出した札の和が k となるのは $(k = 2, 3, \cdots, n-1)$

$$(1\text{ 回目},\ 2\text{ 回目}) = (j,\ k-j) \quad (j = 1, 2, \cdots, k-1)$$

の $k-1$ 通りで，3 回目の札が $n-k$ 以上である $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(3) &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(k+1) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - (n-1)\right\} \\ &= \frac{1}{6n^3}(n-1)\{n(2n-1)-6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6n^3}(n-1)(n-2)(2n+3)} \end{aligned}$$

■

3 (1) $3^a - 2^b = 1 \quad \cdots ①$

① より　$3^a = 2^b + 1 > 1$　ゆえに　$a \geqq 1$

さらに　$2^b = 3^a - 1 \geqq 3^1 - 1 = 2$　ゆえに　$b \geqq 1$

よって，a，b はともに正である．

(2) 法 4 について　$3 \equiv -1,\ 4 \equiv 0 \pmod 4$

$b > 1$ のとき $(b \geqq 2)$　$3^a - 4 \cdot 2^{b-2} = 1$　ゆえに　$(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$

よって，$b > 1$ ならば，a は偶数である．

(3) $b = 1$ のとき，① より　$3^a - 2 = 1$　ゆえに　$a = 1$

$b > 1$ のとき，(2) の結果から，$a = 2n \cdots ②$ とおくと (n は自然数)

$$3^{2n} - 2^b = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (3^n + 1)(3^n - 1) = 2^b$$

$3^n + 1 = 2^k$，$3^n - 1 = 2^l$ とおくと ($k,\ l$ は自然数)　$b = k + l \cdots ③$

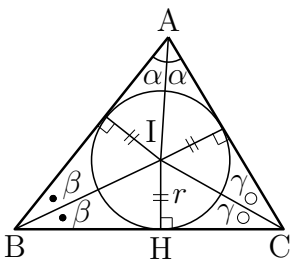
$$2^k - 2^l = (3^n + 1) - (3^n - 1) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^l(2^{k-l} - 1) = 2$$

$2^{k-l} - 1$ は奇数であるから　$2^l = 2,\ \ 2^{k-l} - 1 = 1$

ゆえに　$k = 2,\ l = 1,\ n = 1$　②，③より　$a = 2,\ b = 3$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 3)}$ ■

4 (1) △ABC の内心 I から辺 BC に垂線 IH を下ろすと



$$\mathrm{BH} = \frac{r}{\tan\beta}, \quad \mathrm{CH} = \frac{r}{\tan\gamma}$$

$a = \mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{CH}$ より

$$a = r\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}\right) = r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$= \frac{r(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{r\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

このとき，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin(\beta+\gamma) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

したがって　$a = \dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \cdots ①$

また，正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 2\alpha} = 2R$

したがって　$a = 2R\sin 2\alpha = 4R\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots ②$

①，② より　$\dfrac{r\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 4R\sin\alpha\cos\alpha$　よって　$h = \dfrac{r}{R} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(2) $2\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ とすると，$\gamma = \dfrac{\pi}{4}$，$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，(1) の結果から

$$\begin{aligned} h &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta \\ &= \sqrt{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\} \\ &= \sqrt{2}\cos(\alpha-\beta) - 1 \leqq \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

等号が成立するとき　$\cos(\alpha-\beta) = 1$　ゆえに　$\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{8}$

よって，△ABC は**直角二等辺三角形.**

(3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned} h &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma \\ &= 2\{\cos(\alpha-\beta) - \sin\gamma\}\sin\gamma \\ &= -2\left\{\sin\gamma - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right\}^2 + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

等号が成り立つとき

$$\sin\gamma - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) = 0, \quad \cos(\alpha-\beta) = 1$$

α, β, γ は，鋭角であるから，上式より　$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$

よって，△ABC は**正三角形.**

別解 γ を固定し，$h = f(\alpha)$ とすると，$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \gamma - \alpha$ より

$$\frac{d}{d\alpha}\sin\beta = \cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = -\cos\beta$$

であることに注意して

$$f'(\alpha) = 4\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha(-\cos\beta)\}\sin\gamma = 4\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma$$

α	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2}-\gamma)$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$\alpha = \beta$，$\gamma = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$ のとき極大となる

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 4\sin^2\beta\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = 2(1-\cos 2\beta)\cos 2\beta \\ &= -2\left(\cos 2\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき　$\cos 2\beta = \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\beta = \dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$　■

5 (1) $$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots ①$$

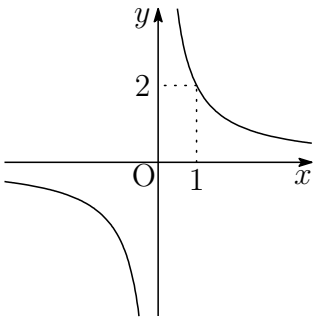
方程式 ① がもつ実数解を k とすると，$k \neq 0$ に注意して

$$k^2 - \alpha k + 2i = 0 \quad ゆえに \quad \alpha = k + \frac{2i}{k}$$

$\alpha = x + yi$ とおくと (x, y は実数)

$$x = k, \quad y = \frac{2}{k} \quad ゆえに \quad xy = 2$$

よって，α の描く図形は，右の図の双曲線である．



(2) ① の解が絶対値 1 の複素数であるとき，

$$\alpha = z + \frac{2i}{z} = z + 2i\overline{z}$$

その解を $z = s + ti$ とおくと ($s^2 + t^2 = 1$)

$$\alpha = (s + ti) + 2i(s - ti) = (s + 2t) + (2s + t)i$$

α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が β であるから

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(s + 2t) + (2s + t)i\}(1 + i)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-s + t) + 3(s + t)i\}$$

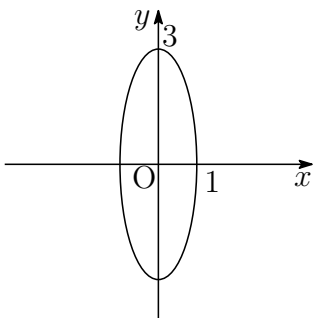
$\beta = x + yi$ とおくと $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s + t), \quad y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(s + t)$

したがって $\quad s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x + \dfrac{y}{3}\right)$，$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \dfrac{y}{3}\right)$

これらを $s^2 + t^2 = 1$ に代入して整理すると

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

よって，β の描く図形は，右の図の楕円である．

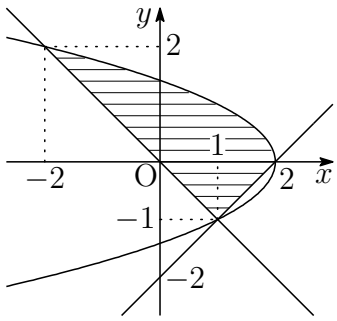


■

6 (1) xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) 直線 $x+y=0$ に平行な単位ベクトルと垂直な単位ベクトル，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，この向きに X 軸，Y 軸を定め，次の直交変換を行う．

$$\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち　$\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}=x,\quad \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}=y$

ゆえに　$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}},\quad Y=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

このとき，次の対応をなす．

$(x,\ y)=(-2,\ 2)$ は　$(X,\ Y)=(-2\sqrt{2},\ 0)$,

$(x,\ y)=(2,\ 0)$　は　$(X,\ Y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.

放物線 $x=-y^2+2\ (0 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

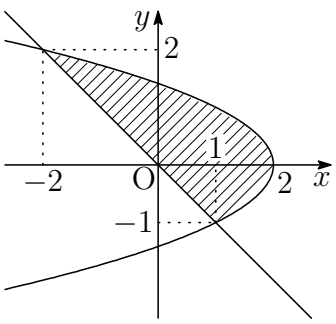
$$X=\frac{-y^2-y+2}{\sqrt{2}},\quad Y=\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow 0$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

求める回転体の体積 V は，$\dfrac{dX}{dy}=\dfrac{-2y-1}{\sqrt{2}}$ により

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\,dX = \pi\int_2^0 \left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-2y-1}{\sqrt{2}}\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2 (-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2 (2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{y^6}{3}-\frac{3y^5}{5}-2y^4+\frac{5y^3}{3}+6y^2+4y\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi} \end{aligned}$$

補足 xy 平面おける領域



$$T : \begin{cases} x + y^2 \leqq 2 \\ x + y \geqq 0 \end{cases}$$

の面積を求める．前ページの直交変換により
このとき，次の対応をなす．

$(x,\ y) = (-2,\ 2)$ は　$(X,\ Y) = (-2\sqrt{2},\ 0)$,
$(x,\ y) = (1, -1)$　は　$(X,\ Y) = (\sqrt{2},\ 0)$.

放物線 $x = -y^2 + 2\ (-1 \leqq y \leqq 2)$ は，この直交変換により

$$X = \frac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}},\quad Y = \frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}}$$

y	$2 \longrightarrow -1$
X	$-2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$

T を直線 $y = -x$ のまわりに一回転して得られる立体の体積を U とすると

$$\begin{aligned} U &= \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\, dX = \pi \int_{2}^{-1} \left(\frac{-y^2 + y + 2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{-2y - 1}{\sqrt{2}}\, dy \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} (y+1)^2 (2-y)^2 (2y+1)\, dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} (y+1)^2 (2-y)^2 \{5(y+1) - (2-y)\}\, dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} \{5(y+1)^3 (2-y)^2 - (y+1)^2 (2-y)^3\}\, dy \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \left(5 \cdot \frac{3!2!}{6!} \cdot 3^6 - \frac{2!3!}{6!} \cdot 3^6 \right) = \frac{81\sqrt{2}}{20} \pi \end{aligned}$$

公式 $\displaystyle \boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}}$ を利用[1].

類題 九州大学工学部 2018 年一般後期工学部 5 番[2]

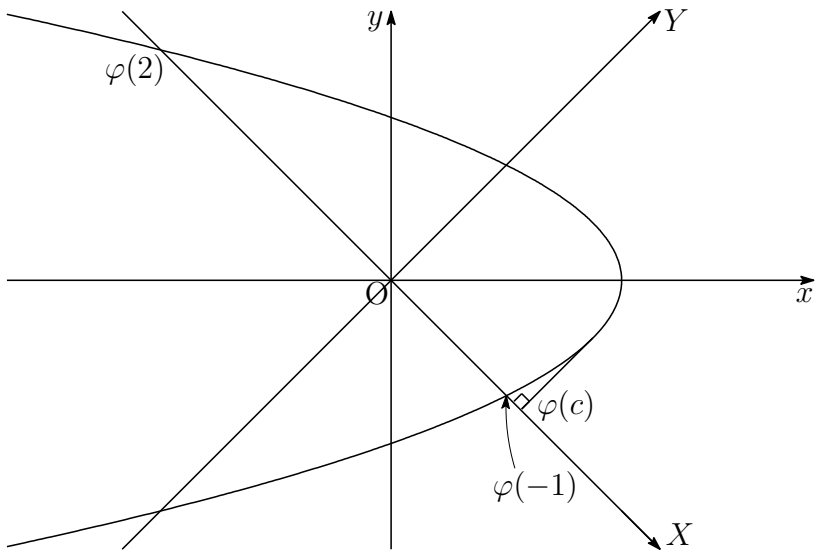
注意 X は y の関数であるから $X = \varphi(y)$ とおくと，$\varphi(y) = \dfrac{-y^2 - y + 2}{\sqrt{2}}$.

$$V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\, dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(0)} Y^2\, dX,$$
$$U = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} Y^2\, dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)} Y^2\, dX$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{5}$

なお，面積 U は，下の図から分かるように，次の計算過程を省略している．

$$U = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(c)} Y^2\,dX - \pi \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(c)} Y^2\,dX = \pi \int_{\varphi(2)}^{\varphi(-1)} Y^2\,dX$$



上の図の c の値は，$\varphi(y)$ を最大にする y の値であるから　$c = -\dfrac{1}{2}$ ■