平成 29 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 a，b を実数とする．$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする．

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a，b の条件を求めよ．

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ．

2 A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数でない確率を求めよ．

3 a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする．

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

4 s を正の実数とする．鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする．線分 CD と線分 AE の交点を F とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ．

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする．FG の長さが最大となるときの s を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ α，β，γ を複素数とし，

$$z\overline{z} + \alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0 \qquad \cdots(*)$$

を満たす複素数 z を考える．以下の問いに答えよ．

(1) z は

$$(\alpha - \overline{\beta})z - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{z} + \gamma - \overline{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ．

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要条件を α，β を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，b，c を実数とし，

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad J(a,\ b,\ c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく．ただし，$a \neq 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ．

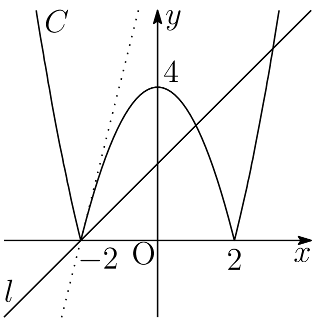
(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \\ -x^2+4 & (-2 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$



$l : y = ax + b$ は点 $(-2,\ 0)$ を通るから

$$0 = -2a + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a$$

$f(x) = -x^2 + 4$ とすると　$f'(x) = -2x$

$f'(-2) = 4$ であるから，l の傾きについて

$$0 < a < 4$$

よって，求める条件は　$\boldsymbol{b = 2a\ (0 < a < 4)}$

(2) 条件を満たすのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) 点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
(1) で得られた結果から　$b = 2a\ (0 < a < 4)$

(ii) 点 $(2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつとき，
$y = |x^2-4|$ の y 軸に関する対称性から　$b = -2a\ (-4 < a < 0)$

(iii) l が $y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ と接するとき，
$y = f(x)\ (-2 < x < 2)$ 上の点の接線で傾きが a となる x 座標は

$$f'(x) = -2x = a \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{a}{2}$$

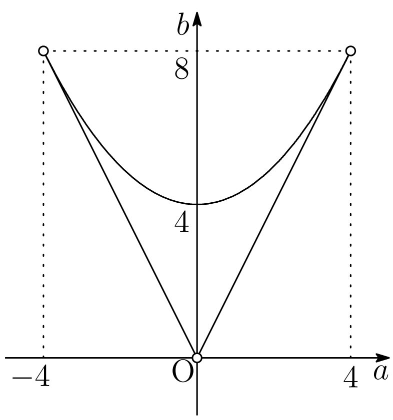
このとき　$-2 < -\dfrac{a}{2} < 2$　すなわち　$-4 < a < 4$

$f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + 4$ であるから，この接線の方程式は

$$y - \left(-\frac{a^2}{4} + 4\right) = a\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = ax + \frac{a^2}{4} + 4$$

これが直線 l の方程式であるから　$b = \dfrac{a^2}{4} + 4 \quad (-4 < a < 4)$

(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ が描く軌跡は，次のようになる．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 得点が 3 点となるのは，$\{0,1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$ の 3 通り．
このうち，0 を取り出さないのが 2 通り．
よって，A，B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{9-4}{400}=\mathbf{\frac{1}{80}}$$

(2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の 20 通り．

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1,2,3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1,2,4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$	2
3	$\{0,1,2\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1,4,5\}$，$\{2,3,5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2,4,5\}$	1
4	$\{0,1,3\}$，$\{3,4,5\}$	2
5	$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$	2
6	$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$	2
7	$\{0,2,5\}$，$\{0,3,4\}$	2
8	$\{0,3,5\}$	1
9	$\{0,4,5\}$	1

上の表から，A 君，B 君の得点が等しくなる確率は

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 5+\left(\frac{2}{20}\right)^2\times 6+\left(\frac{3}{20}\right)^2=\frac{5+24+9}{400}=\frac{19}{200}$$

A 君，B 君それぞれの勝つ確率は等しく $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{19}{200}\right)=\dfrac{181}{400}$

A 君が $\dfrac{7}{3}$ 点で勝つ確率は $\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

A 君が $\dfrac{8}{3}$ 点で勝つ確率は $\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1+1}{20}=\dfrac{4}{400}$

A 君が $\dfrac{10}{3}$ 点で勝つ確率は $\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1+1+2+3}{20}=\dfrac{14}{400}$

A 君が $\dfrac{11}{3}$ 点で勝つ確率は $\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1+1+2+3+2}{20}=\dfrac{9}{400}$

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}}{\frac{181}{400}}=\mathbf{\dfrac{28}{181}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a,\ b$, c が 1 以上 7 以下の互いに異なる整数に対し，2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots (*)$$

の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると，2 次方程式 $(*)$ が有理数解をもつとき，D は平方数であることに注意して，次の場合分けを行う．

(i) $b = 3$ のとき，$D = 9 - 4ac$ より　$ac = 2$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(ii) $b = 4$ のとき，$D = 16 - 4ac$ より　$ac = 3$　ゆえに次の 2 組

$$(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

(iii) $b = 5$ のとき，$D = 25 - 4ac$ より　$ac = 4,\ 6$　ゆえに次の 6 組

$$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(iv) $b = 6$ のとき，$D = 36 - 4ac$ より　$ac = 5,\ 8,$　ゆえに次の 4 組

$$(a,\ c) = (1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

(v) $b = 7$ のとき，$D = 49 - 4ac$ より　$ac = 6,\ 10,\ 12$　ゆえに次の 10 組

$$(a,\ c) = (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$$

(i)〜(v) より，求める総数は　$2 + 2 + 6 + 4 + 10 = \mathbf{24}$ (組)

(2) (1) で示した場合分けにより，$(b,\ \sqrt{D},\ ac)$ の組合せは次とおりである．

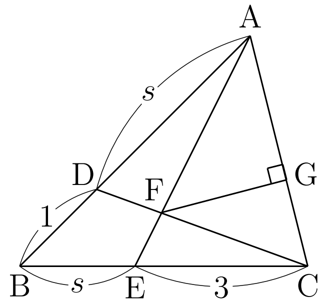
b	3	4	5	5	6	6	7	7	7
$\sqrt{D}$	1	2	3	1	4	2	5	3	1
ac	2	3	4	6	5	8	6	10	12
	○	○	○		○	○	○	○	

2 次方程式 $(*)$ の解の 1 つ $x = -\dfrac{b + \sqrt{D}}{2a}$ に注目すると，$b + \sqrt{D}$ が $2a$ で割り切れるもの (上に示した○) は，整数解をもつから，残りの場合について整数解を持たない組合せを求める．

- $b = 5,\ \sqrt{D} = 1,\ ac = 6$ のとき，$x = \dfrac{-5 \pm 1}{2a}$ より，$a = 6,\ c = 1$
- $b = 7,\ \sqrt{D} = 1,\ ac = 12$ のとき，$x = \dfrac{-5 \pm 1}{2a}$ より，$a = 6,\ c = 2$

これと (1) の結果により，求める $(a,\ b,\ c)$ の総数は　$24 - 2 = \mathbf{22}$ (組)

$\boxed{4}$ (1) $\triangle$ABE と直線 CD について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

したがって　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=s(s+3):3$

点 E は線分 BC を $s:3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}\\&=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}}$

(2) $\triangle\mathrm{AFC}:\triangle\mathrm{AEC}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE}$，$\triangle\mathrm{AEC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$ であるから

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}\triangle\mathrm{AEC}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\triangle\mathrm{AEC},$$
$$\triangle\mathrm{AEC}=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}$$

上の 2 式から　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\dfrac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}$ であるから

$$\mathrm{FG}=\frac{2\triangle\mathrm{AFC}}{\mathrm{AC}}=\frac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$$

$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s}=s+\frac{3}{s}+3\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}+3=2\sqrt{3}+3$$

したがって　　$\mathrm{FG}=\dfrac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$

FG が最大となる，すなわち，上式において等号が成立するとき

$$s=\frac{3}{s}\quad よって\quad \boldsymbol{s=\sqrt{3}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\qquad z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad \cdots(*)$

$(*)$ の両辺の共役な複素数は $\qquad z\overline{z}+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \quad \cdots(\overline{*})$

$(*)-(\overline{*})$ より $\qquad (\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$

(2) γ は実数であるから，$\gamma=\overline{\gamma}$ を (1) の結果に代入すると

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$$

したがって，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である．これを t とおくと

$$(**) \quad (\alpha-\overline{\beta})z=t \qquad (t \text{ は実数})$$

(i) $\alpha-\overline{\beta}=0$，すなわち，$\alpha=\overline{\beta}$ のとき，$(*)$ から

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \quad \text{ゆえに} \quad |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

$\gamma<0$ であるから，z は点 $-\beta$ を中心と半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の無数の点である．したがって，これは条件に反する．

(ii) $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$，すなわち，$\alpha\neq\overline{\beta}$ のとき，$(**)$ より $\quad z=\dfrac{t}{\alpha-\overline{\beta}} \quad \cdots①$

これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{t^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\frac{\alpha t}{\alpha-\overline{\beta}}+\frac{\beta t}{\overline{\alpha}-\beta}+\gamma=0$$
$$t^2+\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+\beta(\alpha-\overline{\beta})t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma=0$$
$$t^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)t+|\alpha-\overline{\beta}|^2\gamma=0$$

$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ および $\gamma<0$ であるから，上式を満たす実数 t は

$$t=\pm|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}$$

の 2 個ある．これを ① に代入して

$$z=\pm\frac{|\alpha-\overline{\beta}|\sqrt{-\gamma}}{\alpha-\overline{\beta}}=\pm\frac{\sqrt{-\gamma}}{|\alpha-\overline{\beta}|}(\overline{\alpha}-\beta)$$

このとき，$(*)$ を満たす z はちょうど 2 個ある．

(i)，(ii) より，求める必要十分条件は $\qquad \boldsymbol{\alpha\neq\overline{\beta}}$

解説 $z=x+yi$，$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおいて，これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}x^2+y^2+(a+bi)(x+yi)+(c+di)(x-yi)+\gamma=0\\ x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\frac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}\qquad\\ +\left\{(b+d)x+(a-c)y+\frac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}\right\}i=0\end{aligned}$$

したがって，$z=x+yi$ は，次の方程式の解である．

$$\begin{cases}x^2+y^2+(a+c)x+(-b+d)y+\dfrac{\gamma+\overline{\gamma}}{2}=0\\ (b+d)x+(a-c)y+\dfrac{\gamma-\overline{\gamma}}{2i}=0\end{cases}$$

とくに γ が負の実数であるとき，上の第 1 式は原点を内部にもつ円を表す．

$$\left(x+\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{-b+d}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{-b+d}{2}\right)^2-\gamma$$

第 2 式は原点を通る直線を表す．したがって，z はこの円と直線の共有点であるから，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個ある．

ただし，$b+d=a-c=0$ のとき，第 2 式は複素数平面上のすべての点であるから，z は第 1 式の円を表し，無数の z が存在する．

$$a=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\quad b=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i},\quad c=\frac{\beta+\overline{\beta}}{2},\quad d=\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}$$

であるから，このとき

$$\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}+\frac{\beta-\overline{\beta}}{2i}=0,\quad \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}-\frac{\beta+\overline{\beta}}{2}=0$$

ゆえに　$\alpha-\overline{\beta}-\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0,\quad \alpha-\overline{\beta}+\overline{\alpha-\overline{\beta}}=0$　すなわち　$\alpha=\overline{\beta}$

よって，求める必要十分条件は　　$\alpha\neq\overline{\beta}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)
$$(e^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$
$$(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(-b\sin bx + a\cos bx)$$

上の 2 式から，$\{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\}' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ より

$$\begin{aligned}
I(a,\ b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\ e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{b}{a^2+b^2}e^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2} + \frac{a}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2} - 1\right)}
\end{aligned}$$

(2) $\sin bx\sin cx = \dfrac{1}{2}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\}$ より

$$\begin{aligned}
J(a,\ b,\ c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{I(a,\ b-c) - I(a,\ b+c)\}}
\end{aligned}$$

(3) $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ であるから

$$2\cos 4tx\sin tx = \sin 5tx - \sin 3tx$$
$$2\cos 3tx\sin 2tx = \sin 5tx - \sin tx$$

上の 2 式の辺辺をそれぞれ掛けさらに 2 倍すると

$$\begin{aligned}
&8\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx \\
&\quad = 2(\sin 5tx - \sin 3tx)(\sin 5tx - \sin tx) \\
&\quad = 2\sin^2 5tx - 2\sin 5tx\sin tx \\
&\qquad\qquad - 2\sin 5tx\sin 3tx + 2\sin 3tx\sin tx \\
&\quad = 1 - \cos 10tx - (\cos 4tx - \cos 6tx) \\
&\qquad\qquad - (\cos 2tx - \cos 8tx) + (\cos 2tx - \cos 4tx) \\
&\quad = 1 - 2\cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 10tx
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

$$= \Big[\ e^x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 10t)$$

(1) の結果より，$\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ に注意すると

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx = \Big[\ e^t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$$