

平成28年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす. これらの垂線は垂心 H で交わる. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ.
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ.

2 以下の問いに答えよ.

- (1) 6以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

- (2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 (p, q) をすべて求めよ.

3 サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b, c がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ.
- (2) a, b, c がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ.

4 多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める. ただし, i は虚数単位とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき, 係数 a_0, \dots, a_7 をすべて求めよ.

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して,

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて, 多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える. $\theta = \frac{\pi}{7}$ として, $k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく. このとき, $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し, $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ.

5 空間内に, 直線 l で交わる 2 平面 α, β と交線 l 上の 1 点 O がある. さらに, 平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を, どちらも点 O を通り l に垂直にとる. m, n 上にそれぞれ点 P, Q があり,

$$OP = \sqrt{3}, \quad OQ = 2, \quad PQ = 1$$

であるとする. 線分 PQ 上の動点 T について, $PT = t$ とおく. 点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ.

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく. T が線分 PQ 上を動くとき, $f(t)$ の最大値と, そのときの t の値を求めよ.

6 関数

$$f(x) = \int_0^\pi |\sin(t-x) - \sin 2t| dt$$

の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $\angle BEC = \angle BFC$ より, 四角形 $BCEF$ は BC を直径とする円に内接する.
 $\angle AEH = 90^\circ$, $\angle AFH = 90^\circ$ であるから, $\angle AEH + \angle AFH = 180$ より, 四角形 $AFHE$ は AH を直径とする円に内接する.

- (2) $\triangle HCE$ と $\triangle HBF$ において

$$\angle CHE = \angle BHF \quad (\text{対頂角}),$$

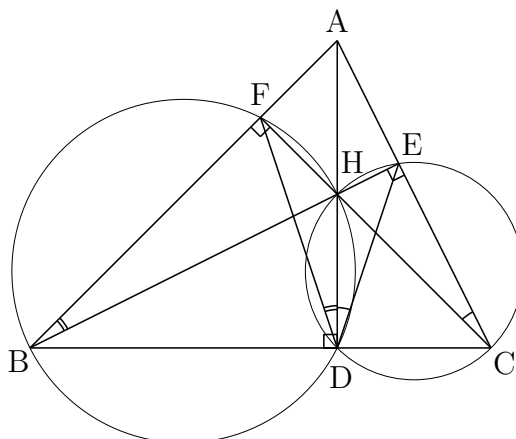
$$\angle HEC = \angle HFB \quad (\text{H は } \triangle ABC \text{ の垂心})$$

したがって $\triangle HCE \sim \triangle HBF$ ゆえに $\angle HCE = \angle HBF \dots \textcircled{1}$

四角形 $ECDH$ の対角の和が 180° であるから四角形 $ECDH$ は円に内接し,
 円周角の定理により $\angle HCE = \angle HDE \dots \textcircled{2}$

四角形 $FBDH$ の対角の和が 180° であるから四角形 $FBDH$ は円に内接し,
 円周角の定理により $\angle HBF = \angle HDF \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より $\angle HDE = \angle HDF$ よって $\angle ADE = \angle ADF$



2 (1) $2^n > n^2 + 7 \quad \dots (A)$

[1] $n = 6$ のとき, 左辺 $= 2^6 = 64$, 右辺 $= 6^2 + 7 = 43$

このとき, (A) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると, $2^k > k^2 + 7$ であるから

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &> 2(k^2 + 7) = (k+1)^2 + 7 + (k-1)^2 + 5 \\ &> (k+1)^2 + 7 \end{aligned}$$

したがって, $n = k+1$ のとき, (A) は成立する.

[1], [2] より, 6以上の整数 n に対して, 不等式 (A) は成立する.

(2) $p^q = q^p + 7$ より $p^q - q^p = 7 \quad \dots (*)$

(*) を満たす素数 p, q の偶奇は異なるから (p, q の一方は 2)

$$f(n) = 2^n - n^2$$

とにおいて, $f(n) = \pm 7$ を満たす素数 n を求めればよい.

(1) の結果から, 6以上の整数 n に対して, $f(n) > 7$ であるから

$$n = 3, 5$$

の場合を調べればよい.

$$f(3) = 2^3 - 3^2 = -1, \quad f(5) = 2^5 - 5^2 = 7$$

上の結果から, 求める素数の組は $(p, q) = (2, 5)$ ■

3 (1) 直角三角形となる 3 辺の長さは, 3, 4, 5 であるから, 求める確率は

$$\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$$

(2) a を最大辺とする鈍角三角形の条件は $b + c > a, \quad b^2 + c^2 < a^2$

上式を満たすのは, 次の 13 組.

$a = 3$ のとき $(b, c) = (2, 2)$

$a = 4$ のとき $(b, c) = (2, 3), (3, 2)$

$a = 5$ のとき $(b, c) = (2, 4), (4, 2), (3, 3)$

$a = 6$ のとき $(b, c) = (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3),$
 $(3, 5), (5, 3), (4, 4)$

b, c が最大辺であるときも, それぞれ 13 組.

よって, 求める確率は $\frac{13 \times 3}{6^3} = \frac{13}{72}$ ■

$$\begin{aligned}
 \text{4 (1)} \quad (x+i)^7 - (x-i)^7 &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} i^k - \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} (-i)^k \\
 &= \sum_{k=0}^7 \{i^k - (-i)^k\} {}_7C_k x^{7-k}
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad i^k = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$(-i)^k = \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right)^k = \cos \frac{k\pi}{2} - i \sin \frac{k\pi}{2}$$

上の2式より, $i^k - (-i)^k = 2i \sin \frac{k\pi}{2}$ であるから

$$(x+i)^7 - (x-i)^7 = 2i \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i} = \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^7 a_k x^{7-k} \text{ であるから } a_k = {}_7C_k \sin \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 7)$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a_0 = 0, a_1 = 7, a_2 = 0, a_3 = -35,}$$

$$\mathbf{a_4 = 0, a_5 = 21, a_6 = 0, a_7 = -1}$$

$$(2) \quad P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) &= \frac{1}{2i} \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + i \right)^7 - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - i \right)^7 \right\} \\
 &= \frac{1}{2i \sin^7 \theta} \{ (\cos \theta + i \sin \theta)^7 - (\cos \theta - i \sin \theta)^7 \} \\
 &= \frac{1}{2i \sin^7 \theta} \{ (\cos 7\theta + i \sin 7\theta) - (\cos 7\theta - i \sin 7\theta) \} = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \theta = \frac{\pi}{7} \text{ のとき, (2) の結果から } P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) = 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

$$P(x) = Q(x^2) \text{ であるから } Q\left(\frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right) = 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ ($k=1, 2, 3$) は3次方程式 $a_1 x^3 + a_3 x^2 + a_5 x + a_7 = 0$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_3}{a_1} = -\frac{-35}{7} = 5 \quad \blacksquare$$

- 5 (1) $OP = \sqrt{3}$, $OQ = 2$, $PQ = 1$ より,
 $\triangle OPQ$ について

$$\angle O = 30^\circ, \angle P = 90^\circ, \angle Q = 60^\circ$$

右の図から, 直線 PT は平面 α と垂直であるから, $PT = t$ より, T から α までの距離は t

したがって, S と α の切り口は, 半径

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 - t^2} = \sqrt{2 - t^2}$$

の円である. したがって, その面積は $\pi(\sqrt{2 - t^2})^2 = \pi(2 - t^2)$

- (2) $QT = PQ - PT = 1 - t$ より, T から平面 β までの距離を d とすると

$$d = QT \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - t)$$

したがって, S と β の切り口は, 半径

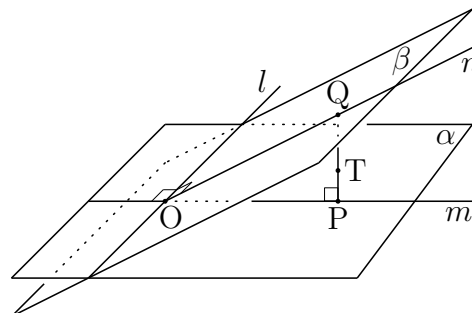
$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 - d^2} = \sqrt{2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2}$$

の円であり, その面積は $\pi \left\{ 2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2 \right\}$

これと (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(t) &= \pi(2 - t^2) + \pi \left\{ 2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2 \right\} \quad (0 \leq t \leq 1) \\ &= \pi \left(-\frac{7}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{13}{4} \right) \\ &= \pi \left\{ -\frac{7}{4} \left(t - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{25}{7} \right\} \end{aligned}$$

よって, $f(t)$ は $t = \frac{3}{7}$ のとき, 最大値 $\frac{25}{7}\pi$ をとる. ■



6 $g(t) = \sin 2t - \sin(t-x)$ とおくと $g(t) = 2 \sin \frac{t+x}{2} \cos \frac{3t-x}{2}$
 $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq x \leq \pi$ より, $0 \leq \frac{t+x}{2} \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{3t-x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}$ であるから

$$\frac{3t-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち, } 0 \leq t \leq \frac{\pi+x}{3} \text{ のとき } g(t) \geq 0$$

$$\frac{3t-x}{2} \geq \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち, } \frac{\pi+x}{3} \leq t \leq \pi \text{ のとき } g(t) \leq 0$$

$$\text{ゆえに } |\sin(t-x) - \sin 2t| = |g(t)| = \begin{cases} g(t) & \left(0 \leq t \leq \frac{\pi+x}{3}\right) \\ -g(t) & \left(\frac{\pi+x}{3} \leq t \leq \pi\right) \end{cases}$$

$g(t)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cos 2t + \cos(t-x) \quad \cdots (*)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi |\sin(t-x) - \sin 2t| dt = \int_0^\pi |g(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi+x}{3}} g(t) dt - \int_{\frac{\pi+x}{3}}^\pi g(t) dt \\ &= \left[G(t) \right]_0^{\frac{\pi+x}{3}} - \left[G(t) \right]_{\frac{\pi+x}{3}}^\pi \\ &= 2G\left(\frac{\pi+x}{3}\right) - G(0) - G(\pi) \end{aligned}$$

(*) より

$$\begin{aligned} G\left(\frac{\pi+x}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \cos \frac{2(\pi+x)}{3} + \cos \frac{\pi-2x}{3} = \frac{3}{2} \cos \frac{2x-\pi}{3}, \\ G(0) &= -\frac{1}{2} + \cos x, \quad G(\pi) = -\frac{1}{2} + \cos(\pi-x) = -\frac{1}{2} - \cos x \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \times \frac{3}{2} \cos \frac{2x-\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \cos x\right) - \left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) \\ &= 3 \cos \frac{2x-\pi}{3} + 1 \end{aligned}$$

よって $x = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 **4**, $x = 0, \pi$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ ■