平成27年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理，医(医・保健(放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を l とし，P を通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

2 xy 平面において，3次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする．また，P を D の点とする．

(1) P を通り C に接する直線が3本存在することを示せ．

(2) P を通り C に接する3本の直線の傾きの和と積がともに0となるような P の座標を求めよ．

3 サイコロを3回投げて出た目の数を順に $p_1,\ p_2,\ p_3$ とし，x の2次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a>0$ を実数とする．$n=1,2,3,\ldots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\quad ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}\,dx,\quad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$$

とおく．

(1) $n=1,2,3,\ldots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $t>0$ を実数とする．座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6 $k \geqq 2$ と n を自然数とする．n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和と呼ぶことにする．ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである．

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ．

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である．

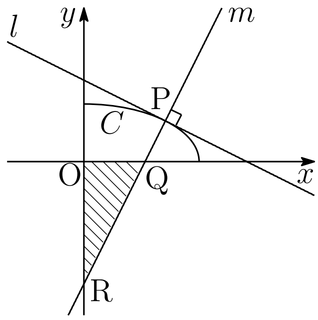
(B) $2n > k^2$ が成り立つ．

(2) f を自然数とする．$n = 2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ．

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする．$n = p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $C: x^2+4y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ を x について微分すると



$$2x+8yy'=0 \quad \text{ゆえに} \quad y'=-\frac{x}{4y'}$$

C の点 $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ における法線 m の傾きは

$$-\frac{1}{y'}=\frac{4y'}{x}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$$

したがって，m の方程式は

$$y-\frac{1}{2}\sin\theta=2\tan\theta\cdot(x-\cos\theta) \quad \text{すなわち} \quad y=2x\tan\theta-\frac{3}{2}\sin\theta$$

m の x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right), \quad \mathrm{R}\left(0, -\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

$S=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ であるから，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ に注意して

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}\sin 2\theta$$

したがって，$2\theta=\frac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{32}}$ をとる．

このとき，点 P は $\left(\cos\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ すなわち $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$　$\cdots$①

C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

これを t について整理すると　$2t^3 - 3xt^2 + x + y = 0$　$\cdots(*)$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，上の t に関する 3 次方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつ P の領域を求める．$f(t) = 2t^3 - 3xt^2 + x + y$ とおくと

$$f'(t) = 6t^2 - 6xt = 6t(t - x) \quad f'(t) = 0 \text{ とすると} \quad t = 0,\ x$$

$(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，$x \neq 0$，$f(0)f(x) < 0$ であるから

$$x \neq 0, \quad (x + y)(-x^3 + x + y) < 0,$$

すなわち　$\begin{cases} x + y > 0 \\ -x^3 + x + y < 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x + y < 0 \\ -x^3 + x + y > 0 \end{cases}$

上の 1 番目の関係式により，$x^3 - x > y > -x$ の表す領域 D の点 P から C に接する直線は 3 本存在する．

(2) P から C に引いた 3 本の接線の接点の x 座標を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると，3 次方程式の解と係数の関係により

$$(**) \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}x, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{x + y}{2}$$

① より，3 本の接線の傾き $3\alpha^2 - 1,\ 3\beta^2 - 1,\ 3\gamma^2 - 1$ について，条件から

$$(3\alpha^2 - 1) + (3\beta^2 - 1) + (3\gamma^2 - 1) = 0$$
$$(3\alpha^2 - 1)(3\beta^2 - 1)(3\gamma^2 - 1) = 0$$

上の第 1 式から　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$　$\cdots$②

上の第 2 式から，一般性を失うことなく

$$3\gamma^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$(**)$ の第 1，第 2 式および ② を

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

に代入すると

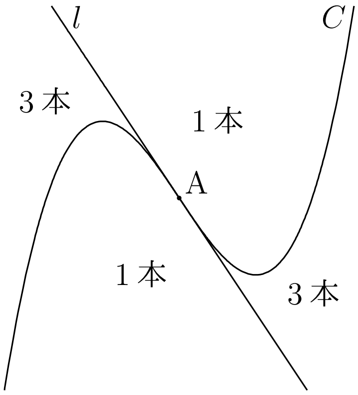
$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 1 + 2{\cdot}0 \quad x > 0 \text{ に注意して} \quad x = \frac{2}{3}$$

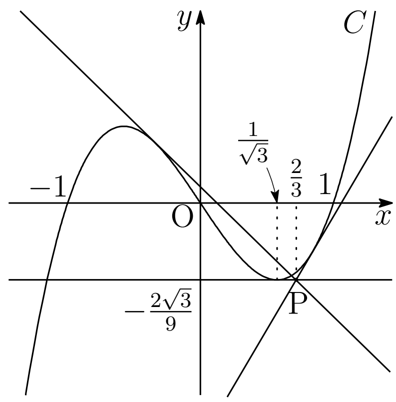
$f(t) = 2t^3 - 2t^2 + \dfrac{2}{3} + y$ となり，γ は $f(t) = 0$ の解であるから

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9} + y = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{複号同順})$$

このとき，D に含まる点 P は $\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}\right)$

解説 3 次関数のグラフを C とし，C の変曲点 A における接線を l とすると，座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は，C と l を境界とする領域によって左下の図のようになる．なお，境界線 C と l 上の点からは 2 本，ただし変曲点からは 1 本である．本題の $C : y = x^3 - x$ の変曲点 $(0,\ 0)$ における接線が $y = -x$ である．また，右下の図でわかるように，$y = x^3 - x$ の極小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ を求めて，これを P の y 座標とすればよい．





$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0\cdots(*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2-4{\cdot}2p_1{\cdot}2p_3=p_2{}^2-16p_1p_3 \geqq 0$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2=4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=6$ のとき　$(p_1,\ p_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times1+3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3=p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_1=0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2-4{\cdot}2p_1{\cdot}2p_1<0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2<4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1=p_3=1$ のとき　$p_2=1,\ 2,\ 3$

$p_1=p_3=2,3,4,5,6$ のとき　$p_2=1,2,3,4,5,6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3+5{\cdot}6}{6^3}=\mathbf{\dfrac{11}{72}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の解 α，β と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}<1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3<p_1$$

2 次方程式 $(*)$ が複素数解をもつ確率は，(1) の結果から

$$1-\frac{5}{216}=\frac{211}{216} \quad \cdots①$$

2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3<p_1$ である確率と 2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3>p_1$ である確率は等しい．

よって，(2) の結果および ① から，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216}-\frac{11}{72}\right)=\mathbf{\frac{89}{216}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

よって $\quad \dfrac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \dfrac{2}{(2n\pi)^a}$

(2) (1) の結果から $\quad \dfrac{(2n\pi)^a}{2} \leqq \dfrac{1}{B_n} \leqq \dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$

$A_n = \dfrac{\pi}{2\{(2n+\frac{1}{2})\}^a} \cdots$ ① であるから

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{B_n} \leqq \frac{\pi}{4}\left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{4n}} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2n}}{2+\frac{1}{2n}} = 1$

よって，はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(3) (1) と同様に，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において (n は自然数)

$$\sin^2 x \geqq 0, \quad \frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

したがって

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

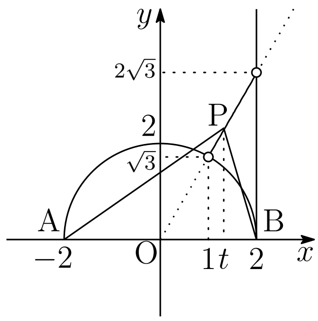
よって $\quad \dfrac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq C_n \leqq \dfrac{\pi}{2(2n\pi)^a}$

$\dfrac{2(2n\pi)^a}{\pi} \leqq \dfrac{1}{C_n} \leqq \dfrac{2\{(2n+1)\pi\}^a}{\pi}$ であるから，① より

$$\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{C_n} \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

(2) の計算と同様して，はさみうちの原理より $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n} = \mathbf{1}$

5 (1) $t>0$ より，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ の第 1 象限の点である．右の図のように $\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角．$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角となるとき P は原点を中心とする半径 2 の円の外部にあるから



$$\mathrm{OP}>2 \quad ゆえに \quad \sqrt{t^2+(\sqrt{3}\,t)^2}>2$$

これを解いて $(t>0)$ $\qquad t>1 \quad \cdots$①

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角となるのは，P の x 座標に注目して $\qquad t<2 \quad \cdots$②

①, ② より，$\triangle\mathrm{ABP}$ が鋭角三角形となる t の範囲は $\qquad \boldsymbol{1<t<2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t+2,\ \sqrt{3}t)$ に垂直で点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ に垂直で点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

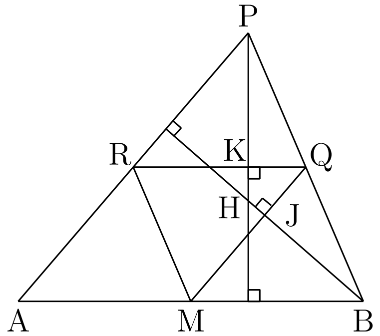
$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

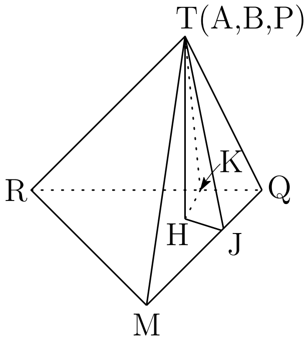
$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心は上の 2 本の直線の交点であるから $\qquad \boldsymbol{\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)}$

(3) (2) で求めた $\triangle\mathrm{PAB}$ の垂心を H，直線 BH と直線 QM の交点を J，直線 PH と直線 QR の交点を K とおく．M，Q，R はそれぞれ辺 AB，BP，PA の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{PA}, \quad \mathrm{QR}/\!/\mathrm{AB} \quad ゆえに \quad \mathrm{HJ}\perp\mathrm{MQ}, \quad \mathrm{HK}\perp\mathrm{QR}$$

A，B，P が重なる四面体の頂点を T とすると，平面 THJ は直線 MQ と垂直，平面 THK は直線 QR と垂直である．これら 2 平面の交線 TH は，直線 MQ および直線 QR に垂直であるから，TH は平面 MQR と垂直である．





A$(-2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ の中点 R の座標は $\left(\dfrac{-2+t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく，y 座標は R の y 座標と等しいから

$$\mathrm{K}\left(t,\ \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{TK}=\mathrm{PK}=\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$1<t<2$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{HK}&=\left|\frac{\sqrt{3}\,t}{2}-\frac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right|=\frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}\,t},\\ \mathrm{TH}&=\sqrt{\mathrm{TK}^2-\mathrm{HK}^2}\\ &=\sqrt{\frac{3t^2}{4}-\frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\,t=2\sqrt{3}\,t$ ゆえに $\triangle\mathrm{MQR}=\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}$

四面体 TMQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot\mathrm{TH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

よって，$t^2=\dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ **をとる．**

発展 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とし，行列$M$を$M=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$とすると，四面体OABCの体積$V$は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$a=|\vec{a}|$，$b=|\vec{b}|$，$c=|\vec{c}|$とし，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$とすると

$$\begin{aligned}{}^tMM&=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a}&\vec{a}\cdot\vec{b}&\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a}&\vec{b}\cdot\vec{b}&\vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a}&\vec{c}\cdot\vec{b}&\vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab\cos\gamma&ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma&b^2&bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta&cb\cos\alpha&c^2\end{pmatrix}\\ &=a^2b^2c^2\begin{pmatrix}1&\cos\gamma&\cos\beta\\ \cos\gamma&1&\cos\alpha\\ \cos\beta&\cos\alpha&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\det M=\det{}^tM$より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$に注意して

$$\begin{aligned}(\det M)^2&=a^2b^2c^2\det\begin{pmatrix}1&\cos\gamma&\cos\beta\\ \cos\gamma&1&\cos\alpha\\ \cos\beta&\cos\alpha&1\end{pmatrix}\\ &=a^2b^2c^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)\end{aligned}$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$　$\cdots$(A)

とくに，等面四面体のとき，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$より

$$\begin{aligned}&1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\ &\qquad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1)-\cos^2\gamma\\ &\qquad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)-\cos^2\gamma\\ &\qquad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma\\ &\qquad=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma\\ &\qquad=\{2\cos\alpha\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma\\ &\qquad=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

よって　　$V=\dfrac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$　$\cdots$(B1)

等面四面体において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ であるから，余弦定理により

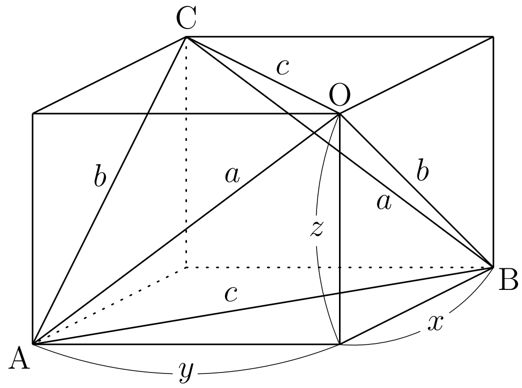
$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを (B1) に代入すると

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\quad\cdots\text{(B2)}$$

また，等面四面体は直方体に埋め込まれるから，(B2) の結果を次のように求めることもできる．

右の図において



$$\begin{aligned}y^2+z^2&=a^2\\ z^2+x^2&=b^2\\ x^2+y^2&=c^2\end{aligned}$$

したがって

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

V は直方体の体積から 4 つの直角四面体を引いたものであるから

$$\begin{aligned}V&=xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

本題において，$\mathrm{TM}=2$，$\mathrm{TQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(t-2)^2+3t^2}$，$\mathrm{TR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(t+2)^2+3t^2}$

$a=\mathrm{TM}$，$b=\mathrm{TQ}$，$c=\mathrm{TR}$ とおくと

$$a^2=4,\quad b^2=t^2-t+1,\quad c^2=t^2+t+1$$

これらを (B2) に代入すると

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(2t^2-2)(4+2t)(4-2t)}=\frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}$$

東北大理系 2013 年

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$とする．$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく．点Cから面OABに垂線を引き，その交点をHとする．

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) CHの長さを求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

解答 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$は平面OAB上のベクトルで$\vec{a}$に垂直．

これと平行な単位ベクトルを$\vec{e}$とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1)の結果から　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\cdot3-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}+1=\frac{1}{3}\quad\text{よって}\quad\mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体OABCの体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

別解 (A)により　$V=\dfrac{1}{6}\sqrt{1+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

6 (1)
$$\begin{aligned} n &= m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) \\ &= \frac{1}{2}k\{m + (m+k-1)\} = \frac{k}{2}(2m+k-1) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

(十分性) n が k-連続和，すなわち，自然数 n が $(*)$ を満たす自然数 m，k をもつとき $(k \geqq 2)$

$$\frac{n}{k} = m + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

m は自然数であるから，(A) は成立する．さらに m は自然数であるから

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{k} \geqq \frac{k+1}{2} > \frac{k}{2}$$

k は自然数であるから $(k \geqq 2)$ $\quad 2n > k^2$ $\quad$ よって，(B) は成立する．

(必要性) 条件 (A)，(B) をみたすとき

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2n-k^2}{2k} + \frac{1}{2} > 0$$

は自然数であるから，これを m' とおくと

$$m' = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{1}{2}k(2m'+k-1)$$

したがって $\qquad n = m' + (m'+1) + \cdots + (m'+k-1)$

よって，n は k-連続和である．

(2) 2^f が k-連続和と仮定すると，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{2^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m+k-1) = 2^{f+1}$$

k と $2m+k-1$ は偶奇が異なるから $(k \neq 1)$

$$k = 2^{f+1}, \quad 2n+k-1 = 1$$

また，(B) より $\quad 2{\cdot}2^f > k^2 \quad$ ゆえに $\quad 2^{f+1} > k^2$

このとき $\quad k > k^2 \quad$ ゆえに $\quad k(k-1) < 0$

これは，$k \geqq 2$ に反するから，不適．

よって，$n = 2^f$ のとき (f は自然数)，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しない

(3) p^f が k-連続和であるとき (p は奇素数)，(A) より次式を満たす整数 m が存在する．

$$m = \frac{p^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k(2m+k-1) = 2p^f \quad \cdots (**)$$

また，(B) より　$2p^f > k^2$　ゆえに　$k < \sqrt{2}\,p^{\frac{f}{2}}$　$\cdots$①

$(**)$ より，k と $2m+k-1$ は偶奇が異なる．

(i) k が奇数のとき　$k = p^i$　$\left(i = 1, 2, \cdots, \left[\frac{f}{2}\right]\right)$

(ii) k が偶数のとき　$k = 2p^j$　$\left(j = 0, 1, \cdots, \left[\frac{f-1}{2}\right]\right)$

ここで，$[x]$ は，x を超えない最大の整数とする．

したがって　(i) の場合が $\left[\frac{f}{2}\right]$ 個

(ii) の場合が $\left[\frac{f-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{f+1}{2}\right]$ 個．

よって，求める個数は　$\left[\frac{f}{2}\right] + \left[\frac{f+1}{2}\right] = \boldsymbol{f}$　(個)

注意 上の f を偶奇に分けて処理してもよい．

補足 n を自然数，a を整数とすると　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{a+k}{n}\right] = a$

証明 $a \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{a+k}{n}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n} = a$$

整数 j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ について $a + j \equiv 0 \pmod{n}$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{a+k}{n}\right] &= \sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{a+j}{n} - 1\right) + \sum_{k=j}^{n-1}\frac{a+j}{n} \\ &= j\left(\frac{a+j}{n} - 1\right) + (n-j)\frac{a+j}{n} \\ &= a\end{aligned}$$

発展

m と n は互いに素である正の整数とするとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ \frac{km}{n}\ \right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数とする．

証明 m を n で割った商を q，余りを r とすると

$$m=nq+r \tag{1}$$

が成り立つ $(1 \leq r < n)$．k を正の整数とすると

$$\frac{km}{n}=kq+\frac{kr}{n} \quad \text{すなわち} \quad \left[\ \frac{km}{n}\ \right]=kq+\left[\ \frac{kr}{n}\ \right]$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kq=\frac{1}{2}qn(n-1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ \frac{km}{n}\ \right]=\frac{1}{2}qn(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ \frac{kr}{n}\ \right] \tag{2}$$

(1) において m と n は互いに素であるから，ユークリッドの互除法により，n と r は互いに素である．

$1 \leq k, k' \leq n-1$ のとき，kr と $k'r$ を n で割った余りが等しいとき

$$kr-k'r=(k-k')r$$

は n の倍数で，r と n が互いに素であることから　$k=k'$

すなわち，$r,\ 2r,\ 3r,\ \cdots,\ (n-1)r$ を n で割った余りは，順序を無視して $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ である．

kr を n で割った余りを d_k とすると $(1 \leq d_k < n)$

$$\frac{kr}{n} = \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{d_k}{n}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kr}{n} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} d_k \\ \frac{1}{2}r(n-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] + \frac{1}{2}(n-1) \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{kr}{n}\ \right] = \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \tag{3}$$

(3) を (2) に代入すると，(1) により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ \frac{km}{n}\ \right] &= \frac{1}{2}qn(n-1) + \frac{1}{2}(r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(nq+r-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(n-1) \end{aligned}$$

証終

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x, \quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について $(a>b>0)$，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a,b)=(b,c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a,b)=b$$

証明 $c \neq 0$ のとき，$a=bq+c$ より $(b,c)\,|\,a$ また，$(b,c)\,|\,b$ であるから，(b,c) は a と b の公約数，したがって

$$(b,c)\,|\,(a,b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c=a-bq$ より $(a,b)\,|\,c$ また，$(a,b)\,|\,b$ であるから，(a,b) は b と c の公約数，したがって

$$(a,b)\,|\,(b,c) \quad \cdots ②$$

①，② より $(a,b)=(b,c)$

$c=0$ のとき，自明． 証終

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき $(b,c)=(c,d)$

すなわち $(a,b)=(b,c)=(c,d)$

2 つの整数 a_1，a_2 について $(a_1>a_2>0)$，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1,a_2)=(a_2,a_3)=(a_3,a_4)=\cdots=(a_k,a_{k+1})=(a_{k+1},a_{k+2})=\cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる．