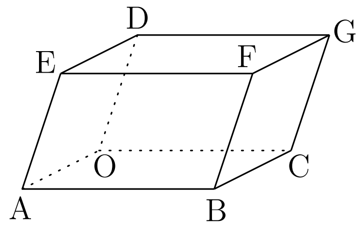
平成 26 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 $x = t + \dfrac{1}{3t}\ \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

2 右図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 空間内にあり，O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする．辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN $= 4$ かつ DN $<$ GN を満たすように定める．



(1) N の座標を求めよ．

(2) 3 点 E，M，N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ．

(3) 3 点 E，M，N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ．

3 1，2，3，4，5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある．

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す．書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ．

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す．書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ．

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す．1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ．

4 不等式 $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする．P を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点，Q と R を円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の異なる 2 点とし，三角形 PQR は領域 D に含まれているとする．a，b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により P は P$'$，Q は Q$'$，R は R$'$ に移されるとする．このとき，三角形 P$'$Q$'$R$'$ が領域 D に含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ．ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$ とする．

(1) I_0 を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，$I_n - I_{n-1}$ を求めよ．

(3) I_5 を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく．$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x = t + \dfrac{1}{3t}\ \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{3t^2} = \frac{1}{t^2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) < 0$$

$$\lim_{t\to+0} x = \infty$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
x		$\searrow$	$\frac{7}{6}$

よって　$\boldsymbol{x \geqq \dfrac{7}{6}}$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ とおくと　$f(x) = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + b$

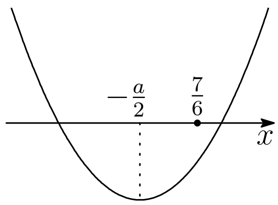
(i) $-\dfrac{a}{2} \leqq \dfrac{7}{6}$，すなわち，$a \geqq -\dfrac{7}{3}$ のとき

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + a\cdot\frac{7}{6} + b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leqq -\frac{7}{6}a - \frac{49}{36}$$

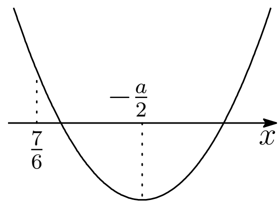
(ii) $\dfrac{7}{6} \leqq -\dfrac{a}{2}$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{7}{3}$ のとき

$$-\frac{a^2}{4} + b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leqq \frac{a^2}{4}$$

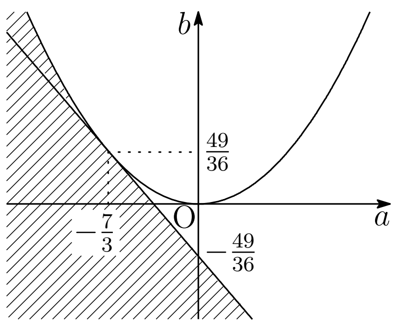
(i) $-\frac{a}{2} \leqq \frac{7}{6}$ のとき



(ii) $\frac{7}{6} \leqq -\frac{a}{2}$ のとき



(i)，(ii) の結果から点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，右の斜線部分で，境界線を含む.



2 (1) O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると

$$|\vec{a}|=2,\quad |\vec{c}|=3,\quad |\vec{d}|=\sqrt{7},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=-2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{d}+t\vec{c}$ とおくと $\left(0<t<\dfrac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-\vec{a}+\vec{d}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{c},$$

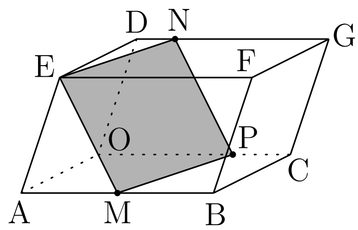
$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{d}|^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{d}$$

$$=4+7+9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-2)=9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+15$$

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=4$ より　$9\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+15=16$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{3}$

DN $<$ GN より，$0<t<\dfrac{1}{2}$ であるから　$t=\dfrac{1}{6}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{d}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$



ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}}=\dfrac{1}{6}\vec{c}-\vec{a}$

P は平面 EMN 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{EN}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

$$=\vec{a}+\vec{d}+\alpha\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right)+\beta\left(\frac{1}{6}\vec{c}-\vec{a}\right)$$

$$=(1-\beta)\vec{a}+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}\right)\vec{c}+(1-\alpha)\vec{d}$$

P は y 軸上の点であるから ($\vec{c}$ のスカラー倍)

$$1-\beta=0,\quad 1-\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha=\beta=1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right)\vec{c}=\dfrac{2}{3}\vec{c}=\dfrac{2}{3}(0,\ 3,\ 0)=(0,\ 2,\ 0)$

よって　　**P(0, 2, 0)**

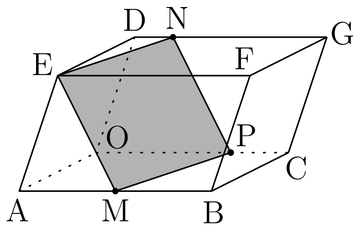
(3) (2) の結果から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{EN}}$
したがって，四角形 EMNP は平行四辺形である．

$$\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}=\frac{1}{2}(0,\ 3,\ 0)-(-1,\ 0,\ \sqrt{6})=\left(1,\ \frac{3}{2},-\sqrt{6}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EN}}=\frac{1}{6}\vec{c}-\vec{a}=\frac{1}{6}(0,\ 3,\ 0)-(2,\ 0,\ 0)=\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EN}})^2}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}+6\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{37}{4}\cdot\frac{17}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{151}}{2}}\end{aligned}$$

補足 平面 EMPN を L とする．平面 OABC と平面 DEFG は平行であるから，これらの 2 平面と L の交線 MP と EN は平行である．
また，平面 ABFE と平面 OCGD は平行であるから，これらの 2 平面と L の交線 EM と NP は平行である．
よって，四角形 EMPN は平行四辺形である．



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 10 個の玉から 2 個取り出す場合の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ (通り)

書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，2 と 5 を 1 個ずつ取り出す場合であるから

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{45}}$

(2) 10 個の玉から 4 個取り出す場合の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ (通り)

書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$\{1,\ 4,\ 5,\ 5\}$, $\{2,\ 2,\ 5,\ 5\}$ の組合せであるから

$$2{\cdot}2 + 1 = 5 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{5}{210} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{42}}$

(3) 10 個の玉から 6 個の玉を順序を付けて取り出す場合の総数は

$${}_{10}\mathrm{P}_6 = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7 \quad \text{(通り)}$$

(i) 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数が異なるとき

$${}_5\mathrm{P}_3 \times 2^3 \times 3! = 2^6{\cdot}3^2{\cdot}5 \quad \text{(通り)}$$

(ii) 1 個目から 3 個目までと，4 個目から 6 個目までが $\{2,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$ の組合せであるとき，1，2，3，4 が区別されることと前半 3 個と後半 3 個の組換えに注意して

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6{\cdot}3^2 \quad \text{(通り)}$$

(iii) 1 個目から 3 個目までと，4 個目から 6 個目までが $\{2,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$ の組合せであるとき，1，2，4，5 が区別されることと前半 3 個と後半 3 個の組換えに注意して

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6{\cdot}3^2 \quad \text{(通り)}$$

(i)〜(iii) から，求める確率は

$$\frac{2^6{\cdot}3^2{\cdot}5 + 2^6{\cdot}3^2 + 2^6{\cdot}3^2}{2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7} = \frac{2^6{\cdot}3^2{\cdot}7}{2^5{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}7} = \frac{2}{3{\cdot}5^2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{75}}$$

■

$\boxed{4}$ (必要性) 行列 A の表す1次変換によって，点 $(x,\ y) \in D$ は $(ax-by,\ bx+ay) \in D$ に移るから，

$$1 \leqq (ax-by)^2+(bx+ay)^2 \leqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \leqq 4 \quad \cdots (*)$$

$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ であるから，$x^2+y^2=1$ のとき，$(*)$ を満たすから

$$1 \leqq a^2+b^2 \leqq 4 \quad \cdots ①$$

また，$x^2+y^2=4$ のとき，$(*)$ を満たすから

$$1 \leqq 4(a^2+b^2) \leqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{4} \leqq a^2+b^2 \leqq 1 \quad \cdots ②$$

①，② より　　$a^2+b^2=1$

(十分性) $a^2+b^2=1$ のとき，$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を満たす θ が存在する．すなわち，行列 A の表す1次変換は，原点を中心に θ だけ回転させる1次変換であるから，D に含まれる三角形 PQR はこの変換によって移動した三角形 P$'$Q$'$R$'$ も D に含まれる．よって，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{a^2+b^2=1}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $I_0 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \Big[\ \log(\sin x)\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

(2) $\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x = -2\sin 2nx \sin x$ より，正の整数 n について

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\,dx \\ &= -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx\,dx = \frac{1}{n}\Big[\ \cos 2nx\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{n}\left\{(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{n=1}^{5}(I_n - I_{n-1}) = \sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}\left\{(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$I_5 - I_0 = -1+1+\left(-\frac{1}{3}\right)+0+\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{15}$$

(1) の結果から　　$\boldsymbol{I_5 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{8}{15}}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$ より

$$f'(x)=\frac{n+1}{a+x}-\frac{1}{x}=\frac{nx-a}{x(a+x)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{a}{n}}$ で，極小値 **0** をとる．

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$，$T_n=\dfrac{{S_n}^n}{n^n(n+1)}$ おくと (n は自然数)

$$\log T_n=\log\frac{{S_n}^n}{n^n(n+1)}=n(\log S_n-\log n)-\log(n+1) \quad \cdots(*)$$

(1) の等式において，$a=S_n$，$x=\dfrac{n+2}{n+1}$ とおくと，$a+x=S_{n+1}$ であることに注意すると，$f(x)\geqq 0$ であるから

$$(n+1)\{\log S_{n+1}-\log(n+1)\}-n(\log S_n-\log n)-\log\frac{n+2}{n+1}\geqq 0$$

したがって

$$\begin{aligned}(n+1)\{\log S_{n+1}-\log(n+1)\}-\log(n+2)&\\ \geqq n(\log S_n-\log n)-\log(n+1)&\end{aligned}$$

上式および $(*)$ より　$\log T_{n+1}\geqq\log T_n$　ゆえに　$T_{n+1}\geqq T_n$

ここで　$S_2=\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$ より　$T_2=\dfrac{{S_2}^2}{2^2(2+1)}=\dfrac{49}{48}>1$

2 以上の自然数 n について，$T_n>1$ であるから

$$\frac{{S_n}^n}{n^n(n+1)}>1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{S_n}{n}\right)^n>n+1$$

よって

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

■