平成 25 年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 k を実数とする．3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする．$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする．

(1) $g(x)$ を k を用いて表せ．

(2) 2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ．

2 四面体 OABC において，OA = OB = OC = 1 とする．
$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

3 A，B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う．自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する．A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ．

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ．

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．

(3) B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ．

4 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\quad b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 一般項 b_n を求めよ．

(2) すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

5 2次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．ただし，$x_0 = 1,\ y_0 = 0$ とする．

(1) A^4 を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(3) 原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ．

6 半径1の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある．底面の円の中心を O とし，直径を1つ取り AB とおく．AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を2つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする．

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．

(2) V の体積を求めよ．

解答例

1 (1) 方程式 $x^3-kx^2-1=0$ の解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-k}{1}=k,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{-1}{1}=1$$

$x_1=\alpha\beta,\ x_2=\beta\gamma,\ x_3=\gamma\alpha$ とおくと，$x_1,\ x_2,\ x_3$ を解とする3次方程式で x^3 の係数が1であるものは

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3=0$$

このとき
$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1&=\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta\\ &=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=1\cdot k=k,\\ x_1x_2x_3&=\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=1^2=1\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{g(x)=x^3+kx-1}$

(2) $f(x)=0$ と $g(x)=0$ の共通解を t とおくと

$$\begin{cases}t^3-kt^2-1=0 & \cdots ①\\ t^3+kt-1=0 & \cdots ②\end{cases}$$

② − ① より　$kt(t+1)=0$

ゆえに　$k=0$ のとき，$f(x)=g(x)$ より，共通解をもつ．

$t=0$ は，$f(x)=0$ および $g(x)=0$ の解ではないので，不適．

$t=-1$ のとき，$f(-1)=g(-1)=-k-2=0$ より　$k=-2$

よって　$\boldsymbol{k=0,-2}$ ■

2 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 3-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}+1=\frac{1}{3}\quad\text{よって}\quad \mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

発展 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とし，行列$M$を$M=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$とすると，四面体OABCの体積$V$は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$a=|\vec{a}|$，$b=|\vec{b}|$，$c=|\vec{c}|$とし，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$とすると

$$
{}^tMM=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta & cb\cos\alpha & c^2\end{pmatrix}
$$
$$
=a^2b^2c^2\begin{pmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{pmatrix}
$$

$\det M=\det{}^tM$より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$に注意して

$$
(\det M)^2=a^2b^2c^2\det\begin{pmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{pmatrix}
$$
$$
=a^2b^2c^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)
$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$　$\cdots$(A)

別解 (A) により　$V=\dfrac{1}{6}\sqrt{1+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$　■

3 (1) 一方の1回目，2回目に出た目をそれぞれ j，k とする．A がちょうど2回投げて A が勝つ目の出方は表の○印の示す20通り．このとき，B の目の出方は6以外の目の出方で5通り．よって，求める確率は

$$\frac{20}{6^2}\times\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{25}{54}}$$

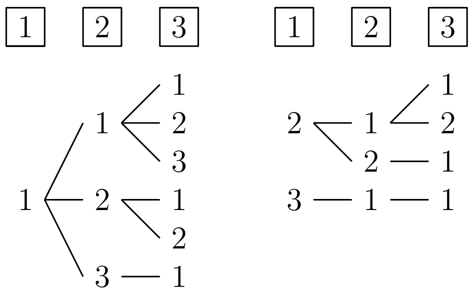
j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	×	×	×	×	○	○
2	×	×	×	○	○	○
3	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○
6						

(2) A が2回投げて A が勝っていないとき，A の2回の目の出方は，表の×印の示す10通り．このとき，B がちょうど2回投げて B が勝つ目の出方は，表の○印の示す20通り．よって，求める確率は

$$\frac{10}{6^2}\times\frac{20}{6^2}=\mathbf{\frac{25}{162}}$$

(3) 一方が3回投げてその目の和が6未満であるのは，右に示した10通り．求める確率は，A，B ともに3回投げ終わった時点で，A，B それぞれの目の和が6未満であるから

$$\left(\frac{10}{6^3}\right)^2=\mathbf{\frac{25}{11664}}$$



■

$\boxed{4}$ (1) $b_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{n}(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}})}$

(2) $-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$ より　$\cos\theta \leqq 1 \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$

したがって，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$e^{n\sin\theta}\cos\theta \leqq e^{n\sin\theta} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}e^{n\sin\theta}\cos\theta$$

ゆえに　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta$

よって　　$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$

(3) (2) の結果から　$nb_n \leqq na_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$

ゆえに　$\dfrac{1}{n}\log(nb_n) \leqq \dfrac{1}{n}\log(na_n) \leqq \dfrac{1}{n}\log\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{n}\log(nb_n) \quad \cdots(*)$

(1) の結果から　$\log(nb_n) = \log(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}) = \log e^{\frac{n}{2}}(1 - e^{-n})$

$$= \frac{n}{2} + \log(1 - e^{-n})$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log(1 - e^{-n})\right\} = \frac{1}{2}$

上式と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} = 0$ を $(*)$ に適用すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$ であるから

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，与えらた関係式は

$$X_n = AX_{n-1} + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots(*)$$

となる．ここで

$$X = AX + C \qquad \cdots(**)$$

を満たす 2×1 行列 X を考えると　$(E - A)X = C$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

このとき，$\det(E - A) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 2 + \sqrt{2} \neq 0$ より

$$X = (E - A)^{-1}C \quad \cdots ①$$

$(*)$，$(**)$ より，$X_0 = C$ に注意して

$$X_n - X = A(X_{n-1} - X) \quad \text{ゆえに} \quad X_n - X = A^n(C - X)$$

したがって

$$\begin{aligned} X_n &= (E - A^n)X + A^nC \\ &= (E - A^n)(E - A)^{-1}C + A^nC \\ &= \{(E - A^n) + A^n(E - A)\}(E - A)^{-1}C \\ &= (E - A^{n+1})(E - A)^{-1}C \quad \cdots ② \end{aligned}$$

よって　$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) ①，② より　$X_n = (E - A^{n+1})X = X - A^{n+1}X$

A は原点の回りに $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転させる行列を表すから，距離 OP_n，すなわち，X_n の大きさが最大となる n は，$A^{n+1} = -E$ のとき

$$n + 1 \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n \equiv 3 \pmod 8}$$

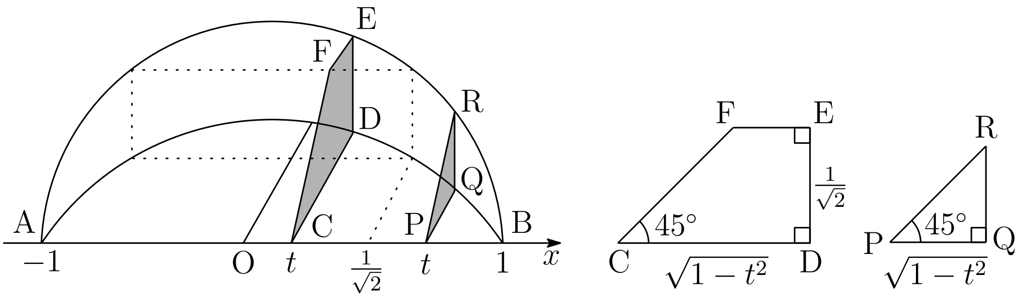
補足 $n \equiv 7 \pmod 8$ のとき，P_n は原点．■

6 (1) (i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$S(t)$ は下の図の台形 CDEF の面積であるから

$$S(t) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1-t^2} + \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{4}$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$ のとき，$S(t)$ は下の図の $\triangle$PQR の面積であるから

$$S(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-t^2}\,)^2 = \frac{1}{2}(1-t^2)$$



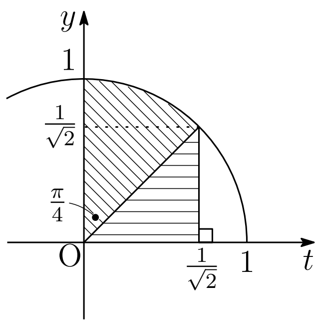
よって　$\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2} - \dfrac{1}{4} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \dfrac{1}{2}(1-t^2) & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(2) 求める体積を W とし，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2}\,dt$ とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned} W &= 2\int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\right)dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-t^2)\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt + \left[-\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \sqrt{2}I + \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

I は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



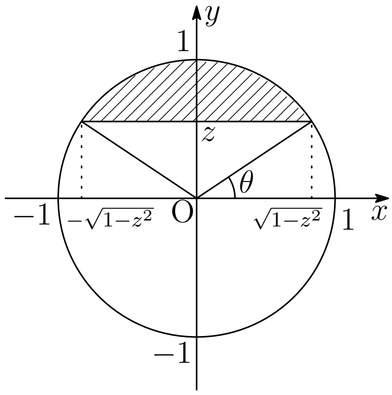
よって　$W = \sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}}$$

別解 V の表す領域は

$$x^2+y^2 \leqq 1,\quad z \leqq y,\quad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

xy 平面に平行な平面による V の断面積を S，
$z=\sin\theta$ とおくと



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi-2\theta) \\ &= \frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{d\theta}=\cos\theta$$

z	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって，V の体積を W とすると

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S\frac{dz}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-\theta\cos\theta-\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \left[\ \frac{\pi}{2}\sin\theta-\theta\sin\theta-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

■