平成24年度　東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理，医(医・保健(放射線・検査))，歯，薬，工，農)

$\boxed{1}$ s，t を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x = s + t + 1$，$y = s - t - 1$ とおく．s，t が $s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

(2) $x = st + s - t + 1$，$y = s + t - 1$ とおく．s，t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

$\boxed{2}$ m を実数とする．座標平面上で直線 $y = x$ に関する対称移動を表す1次変換を f とし，直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す1次変換を g とする．以下の問いに答えよ．

(1) 1次変換 g を表す行列 A を求めよ．

(2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ．

(3) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ 袋A，袋Bのそれぞれに，1から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている．これらのカードをよくかきまぜて取り出していく．以下の問いに答えよ．

(1) $N = 4$ とする．袋A，Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す．ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする．4回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする．$X = 1$，$X = 2$，$X = 3$，$X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ．また，X の期待値を求めよ．

(2) $N = 3$ とし，n は自然数とする．袋A，Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，それらのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す．カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする．p_n と q_n を求めよ．

$\boxed{4}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t - x|}{1 + \sin|t - x|}\, dt$$

と定める．$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ．

5 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする．線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする．以下の問いに答えよ．

(1) y を x を用いて表せ．

(2) 点 P が 2 点 A，B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ．

6 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ．

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ．

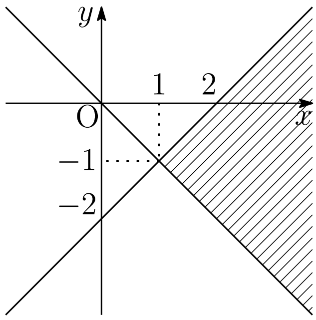
(4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq r \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ から



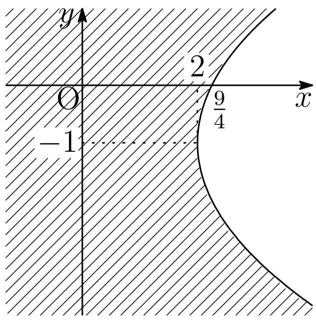
$$s=\frac{x+y}{2},\quad t=\frac{x-y-2}{2}$$

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より

$$x+y \geqq 0,\quad x-y-2 \geqq 0$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む.

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ の 2 式から s を消去し，t について整理すると



$$t^2-(y-1)t+x-y-2=0$$

この 2 次方程式は，実数解をもつから

$$(y-1)^2-4\cdot1(x-y-2) \geqq 0$$

したがって　$x \leqq \dfrac{1}{4}(y+1)^2+2$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む. ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) g を表す行列 A について

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\quad A\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$

よって $\quad A = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}}$$

(2) f の表す行列を F とすると，(1) の結果に $m=1$ を代入して $\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

これと (1) の結果により

$$B = AF = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix}}$$

B をハミルトン・ケーリーの定理に適用することにより

$$B^2 = tB - E, \qquad t = \frac{4m}{1+m^2}$$

したがって $\quad B^3 = tB^2 - B = t(tB-E) - B = (t^2-1)B - tE$

$B^3 = E$ のとき $\qquad (t+1)\{(t-1)B - E\} = O$

上式より，次の i)，ii) の場合がある．

(i) $t=-1$ ゆえに $\boldsymbol{m = -2 \pm \sqrt{3}}$

(ii) $t \neq 1$ に注意して $\quad B = \dfrac{1}{t-1}E$

これを $B^3 = E$ に代入すると $\quad \dfrac{1}{(t-1)^3}E = E$

これより $\quad \dfrac{1}{t-1} = 1 \quad$ すなわち $\quad t = 2 \quad$ ゆえに $\quad \boldsymbol{m = 1}$ ■

3 (1) A から取り出されたカードを順に，α, β, γ, δ とし，これを用いた B からの取り出し方は $4!$ 通りある．

α だけが一致する場合，B の取り出し方は，次の 2 通り．

$$\alpha\gamma\delta\beta,\quad \alpha\delta\beta\gamma$$

一致する組が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあるから　$P(X=1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times 2}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

α, β だけが一致する場合，B の取り出し方は，$\alpha\beta\delta\gamma$ の 1 通り．

一致する組が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあるから　$P(X=2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times 1}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

3 つが一致する場合はないので　$P(X=3)=\boldsymbol{0}$

4 つとも一致する場合は 1 通りであるから　$P(X)=\dfrac{1}{4!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{24}}$

また，期待値は　$E(X)=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{1}{4}+4\cdot\dfrac{1}{24}=\boldsymbol{1}$

(2) 袋 A，B にカードが 3 枚ずつ残っているとき，取り出したカードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$ である．n 回目で初めてカードの数字が一致する確率であるから

$$p_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

袋 A，B にカードが 2 枚ずつ残っているとき，取り出したカードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$ である．このとき，m 回目で初めてカードの数字が一致する確率を r_m とすると

$$r_m=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

$\boldsymbol{q_1=q_2=0}$，q_n は $(n\geqq 3)$

$$\begin{aligned}
q_n&=\sum_{k=1}^{n-2}p_kr_{n-k-1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1}{\frac{4}{3}-1}=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ $u=t-x$ とおくと　$\dfrac{du}{dt}=1$

t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$-x \longrightarrow \frac{\pi}{2}-x$

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}\,dt=\int_{-x}^{\frac{\pi}{2}-x}\frac{\cos|u|}{1+\sin|u|}\,du$$

$$f'(x)=\frac{\cos|\frac{\pi}{2}-x|}{1+\sin|\frac{\pi}{2}-x|}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'-\frac{\cos|-x|}{1+\sin|-x|}(-x)'$$

$$=-\frac{\cos|\frac{\pi}{2}-x|}{1+\sin|\frac{\pi}{2}-x|}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

(i) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f'(x)=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=-\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき

$$f'(x)=-\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=-\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

このとき，$-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}<0$，$\dfrac{\cos x}{1+\sin x}<0$　ゆえに　$f'(x)<0$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{1+\sin u}\,du=\Big[\log(1+\sin u)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 2,$$

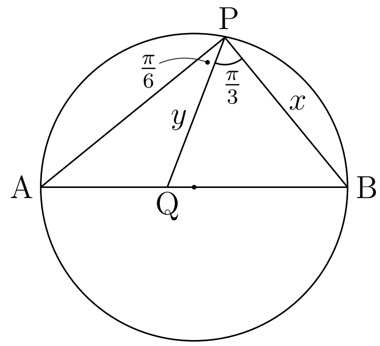
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u}{1+\sin|u|}\,du=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos u}{1-\sin u}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u}{1+\sin u}\,du$$

$$=\Big[-\log(1-\sin u)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\Big[\log(1+\sin u)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$f(\pi)=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{1-\sin u}\,du=\Big[-\log(1-\sin u)\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=-\log 2$$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathbf{2\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$，最小値 $f(\pi)=\mathbf{-\log 2}$　■

5 (1) $\angle\mathrm{BPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ より，$\angle\mathrm{APQ} = \dfrac{\pi}{6}$



$z = \mathrm{AP}$ とおくと，$z = \sqrt{1-x^2}$

$\triangle\mathrm{BPQ} + \triangle\mathrm{APQ} = \triangle\mathrm{APB}$ より

$$\frac{1}{2}xy\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}yz\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}zx$$

よって　$y = \dfrac{2zx}{\sqrt{3}x+z} = \boldsymbol{\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}}$

(2) $\theta = \angle\mathrm{ABP}$ とおくと $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x=\cos\theta$, $z=\sin\theta$ より

$$y = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta} = \frac{2}{\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}}$$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta-\sqrt{3}\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{\cos\theta(\tan^3\theta-\sqrt{3})}{\sin^2\theta}$$

ここで，$\tan\alpha = \sqrt[6]{3}$ とおくと $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

したがって，$\theta=\alpha$ で $f(\theta)$ は最小，すなわち，y は最大となる．

このとき　$x^2 = \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}}$

別解 $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$z' = \dfrac{dz}{dx}$ とおくと　$x^2+z^2=1$ より　$x+zz'=0$

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{z}+\dfrac{1}{x}\right)$ を x について微分すると　$-\dfrac{y'}{y^2} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}z'}{z^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$y' = \frac{y^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}z'}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y^2}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}x}{z^3}+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y^2(z^3-\sqrt{3}x^3)}{2x^2z^3}$$

$z=\sqrt[6]{3}x$ のとき，極大 (最大)．このとき，$x^2+z^2=1$ より　$x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$

■

$\boxed{6}$ (1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より，$a_n > 0$ であるから

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{a_n+1}{2a_n+3}} > 1$$

これから，$a_2 > 1$．よって，数学的帰納法により

$$n \geqq 2 \text{ のとき} \qquad a_n > 1$$

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3} \cdots$ ① より　　$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$

ゆえに　$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4) = 0$　　$\alpha > 0$ より　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}}$

(3) ① より　$\alpha^2 - {a_{n+1}}^2 = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3} - \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3} = \dfrac{\alpha - a_n}{(2\alpha+3)(2a_n+3)}$ 　$\cdots$ ②

$a_n > 0$，$\alpha - a_1 > 0$ であるから，上式により，$\alpha - a_n > 0$ のとき

$$\alpha^2 - {a_{n+1}}^2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha > a_{n+1}$$

(4) ② より　　$\dfrac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \dfrac{1}{(2\alpha+3)(2a_n+3)(a_n+\alpha)}$

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} = 1 + \dfrac{\sqrt{33}-5}{4} > 1$，$a_n \geqq 1$ より

$$2\alpha + 3 \geqq 5, \quad 2a_n + 3 \geqq 5, \quad a_n + \alpha \geqq 2$$

したがって　$\dfrac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq \dfrac{1}{5{\cdot}5{\cdot}2}$　すなわち　$\dfrac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq \dfrac{1}{50}$

上式および (3) の結果から　$0 < \dfrac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq \dfrac{1}{50}$

$$0 < \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha - a_{k+1}}{\alpha - a_k} \leqq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{50} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \alpha - a_n \leqq \frac{1}{50^{n-1}}(\alpha - a_1)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{50^{n-1}}(\alpha - a_1) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\alpha}$$

■