平成 23 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

1 実数 a に対し，不等式

$$y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく．

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ．

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ．

2 a を実数とする．円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする．C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ．

(1) X，Y を a を用いて表せ．

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

3 先生と 3 人の生徒 A，B，C がおり，玉の入った箱がある．箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている．先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う．取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする．この操作を続けて行うものとして，以下の問いに答えよ．ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする．

(1) 2 回目の操作が終わったとき，A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

(2) 2 回目の操作が終わったとき，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

(3) 3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率を求めよ．

4 平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す．$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める．大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ $(0 < \theta < \pi)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ で定める．線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする．このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ．

5 a を実数，z を 0 でない複素数とする．z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1) 次を満たす z を求めよ．

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$\overline{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\frac{a}{z}=0$$

6 行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする．f による点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ の像を P_1 とする．正の整数 n に対し，P_n の f による像を P_{n+1} とする．P_n が点 $\mathrm{Q}(10,\ 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ より　$a^2 - 2(x+1)a + y - 2 \leqq 0$

上の第 2 式から，a の関数

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 - 2(x+1)a + y - 2 \quad (-1 \leqq a \leqq 2) \\ &= (a-x-1)^2 - (x+1)^2 + y - 2 \end{aligned}$$

とし，$f(a)$ の最大値を M とする．

(i) $x + 1 \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$M = f(2) = -4x + y - 2$

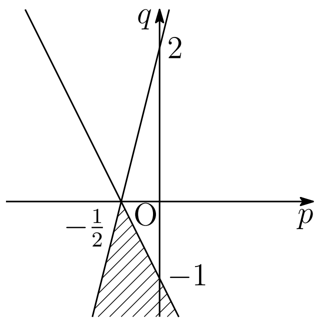
(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq x + 1$ のとき　$M = f(-1) = 2x + y + 1$

条件をみたすとき，$M \leqq 0$ であるから

$x \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$y \leqq 4x + 2$

$-\dfrac{1}{2} \leqq x$ のとき　$y \leqq -2x - 1$

よって，点 $(p,\ q)$ の表す領域は右の図の斜線部分で境界線を含む．



補足　定義域 $-1 \leqq a \leqq 2$ の中央 $\dfrac{1}{2}$ が軸 $a = x + 1$ に対して，左側にあるとき左端で最大，右側にあるとき右端で最大となる．

(2) $f(a)$ の最小値を m とすると

(i) $x + 1 \leqq -1$ のとき，$m = f(-1) = 2x + y + 1$

(ii) $-1 \leqq x + 1 \leqq 2$ のとき，$m = f(x+1) = -(x+1)^2 + y + 2$

(iii) $2 \leqq x + 1$ のとき，$m = f(2) = -4x + y - 2$

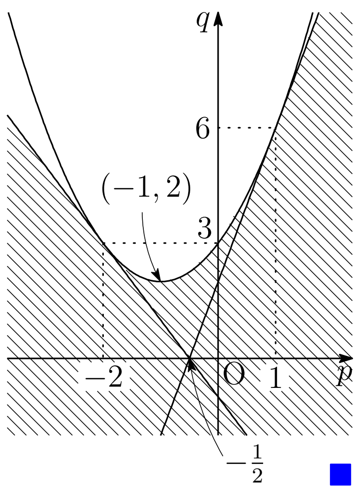
条件を満たすとき，$m \leqq 0$ であるから

$x \leqq -2$ のとき　$y \leqq -2x - 1$

$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき　$y \leqq (x+1)^2 + 2$

$1 \leqq x$ のとき　$y \leqq 4x + 2$

よって，点 $(p,\ q)$ の表す領域は右の図の斜線部分で境界線を含む．



■

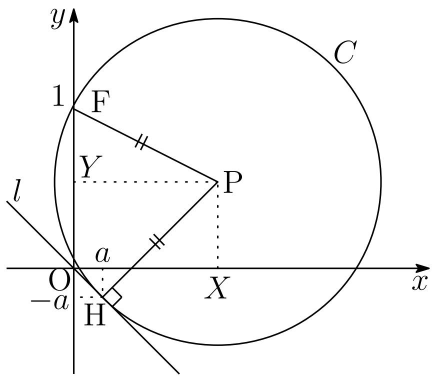
2 (1) F(0, 1)，H$(a, -a)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{FH}} = (a, -a-1)$$

直線 FH の垂直二等分線は

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) + (-a-1)\left(y - \frac{1-a}{2}\right) = 0$$

ゆえに　$ax - (a+1)y - a^2 + \dfrac{1}{2} = 0$　$\cdots$①



直線 HP は，点 H$(a, -a)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - (-a) = 1(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 2a \quad \cdots ②$$

P$(X,\ Y)$ は，連立方程式 ①，② の解であるから

$$\boldsymbol{X = a^2 + 2a + \frac{1}{2}}, \qquad \boldsymbol{Y = a^2 + \frac{1}{2}}$$

解説 点 P の軌跡は点 F を焦点，l を準線とする放物線．

(2) 直線 $y = -x$ を l とする．O を原点とし，l に平行に s 軸，l に垂直に t 軸をとる．x-y 系からの s-t 系への直交変換を次に定める．

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$x = \dfrac{s+t}{\sqrt{2}}$，$y = \dfrac{-s+t}{\sqrt{2}}$　すなわち　$s = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$，$t = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

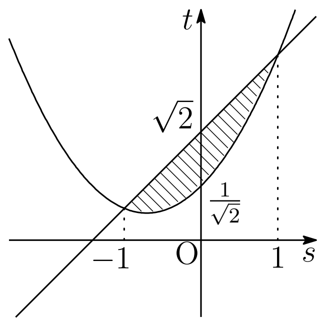
点 P$\left(a^2 + 2a + \dfrac{1}{2},\ a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$ はこの直交変換により

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a^2 + 2a + \frac{1}{2} - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\right\} = \sqrt{2}a$$
$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a^2 + 2a + \frac{1}{2} + \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\right\} = \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

上の 2 式から，P の軌跡の方程式は　$t = \dfrac{s^2}{\sqrt{2}} + s + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$③

直線 $y = 1$，すなわち点 $(x,\ 1)$ はこの直交変換により

$$s = \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad t = s + \sqrt{2} \quad \cdots ④$$



放物線 ③ と直線 ④ の共有点の s 座標は

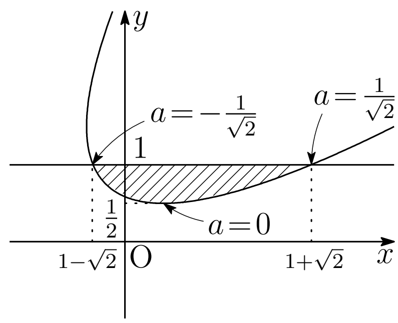
$$\frac{s^2}{\sqrt{2}}+s+\frac{1}{\sqrt{2}}=s+\sqrt{2}$$

これを解いて　$s=\pm 1$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}\left\{s+\sqrt{2}-\left(\frac{s^2}{\sqrt{2}}+s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1+s)(1-s)ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{6}(1+1)^3=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$

別解 (媒介変数による求積法) (1) の結果から，



$$x=f(a)=a^2+2a+\frac{1}{2}$$
$$y=g(a)=a^2+\frac{1}{2}$$

とおくと，点 $(x,\ y)$ の表す図形は，a を媒介変数とする曲線である．

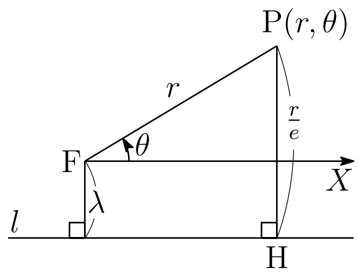
$y=1$ とすると　$a^2+\dfrac{1}{2}=1$　これを解いて　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(-\frac{1}{\sqrt{2}})}^{f(\frac{1}{\sqrt{2}})}(1-y)\,dx=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{1-g(a)\}f'(a)\,da \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-a^2\right)(2a+2)\,da \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da=2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da \\ &= 2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$

次のように求めることもできる．

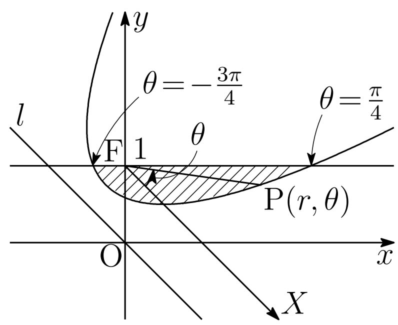
$$S=\int_{g(0)}^{g(\frac{1}{\sqrt{2}})}x\,dy-\int_{g(0)}^{g(-\frac{1}{\sqrt{2}})}x\,dy=\int_{g(-\frac{1}{\sqrt{2}})}^{g(\frac{1}{\sqrt{2}})}x\,dy$$
$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}f(a)g'(a)\,da=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(a^2+2a+\frac{1}{2}\right)\cdot 2a\,da$$
$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2a^3+4a^2+a\right)da=8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}a^2\,da=\frac{8}{3}\Big[\ a^3\ \Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

注意 2 次曲線の極方程式の極は，2 次曲線の焦点である (原点ではない)．右の図における 2 次曲線の焦点 F と準線 l の距離を λ，偏角を θ，離心率を $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とすると



$$r\sin\theta+\lambda=\frac{r}{e}\quad ゆえに\quad r=\frac{e\lambda}{1-e\sin\theta}$$

(極方程式による求積法) 焦点 $F(0,\ 1)$ から準線 $l:y=-x$ までの距離 $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ および離心率 $e=1$ より



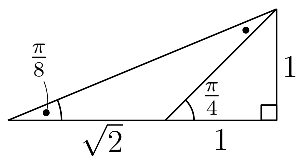
$$r=\frac{1}{\sqrt{2}(1-\sin\theta)}=\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta=\frac{1}{16}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^4(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\cos^4 x}$$
$$=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}(1+\tan^2 x)(\tan x)'\,dx=\frac{1}{8}\Big[\ \tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\ \Big]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}$$

ここで　$\tan\dfrac{3\pi}{8}=1+\sqrt{2}$,

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{8}=1-\sqrt{2}$



よって　　$S=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) サイコロは2回とも1の目が出て，Aが2回とも赤玉を取り出す確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \mathbf{\frac{1}{540}}$$

(2) 1回目の操作でBが赤玉を取り出す事象を X とすると

$$P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2回目の操作でBが赤玉を取り出す事象を Y とすると

$$P(Y) = P(X) = \frac{1}{10}$$

2回の操作でBが2回とも赤玉を取り出す確率 $P(X \cap Y)$ は

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \mathbf{\frac{26}{135}} \end{aligned}$$

注意 非復元試行でも，1回目，2回目の操作で赤玉を取り出す確率はともに $\frac{3}{10}$

(3) 3回目の操作でCが赤玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{3}{20}}$$

解説 箱の中に赤玉が r 個，白玉が w 個あるとき，赤玉を取り出す確率 p は

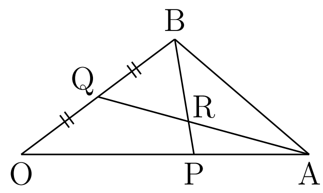
$$p = \frac{r}{r+w}$$

取り出した玉を戻さない(非復元試行)とき，箱の中に残る赤玉の個数が $r-1$ 個になる確率が p で，赤玉の個数が r 個になる確率は $1-p$ である．したがって，次の試行で赤玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{r-1}{r+w-1} + (1-p) \times \frac{r}{r+w-1} &= \frac{r-p}{r+w-1} \\ &= \frac{(r+w)p-p}{r+w-1} = p \end{aligned}$$

よって，赤玉が取り出される確率は，何回目であっても不変である．
本題において，1回目の操作で赤玉が取り出される確率が $\frac{3}{10}$ であるから，3回目の操作で赤玉が取り出される確率も $\frac{3}{10}$ である． ■

4 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2y\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{x}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

点 R は直線 AQ および BP 上の点であるから $(0<t<1)$

$$x+2y=1,\quad \frac{x}{t}+y=1 \quad \text{ゆえに}\quad x=\frac{t}{2-t},\quad y=\frac{1-t}{2-t}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}{2-t}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

$$\begin{aligned}(2-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=-t|\vec{a}|^2+(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}(2-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-9t+(2t-1)\cdot 6\cos\theta+4(1-t)\\&=6(2t-1)\cos\theta-13t+4\end{aligned}$$

$f(\theta)=6(2t-1)\cos\theta-13t+4$ $(0<\theta<\pi)$ とすると，常に $f(\theta)\neq 0$ となる t の値の範囲を求めればよい．

(i) $2t-1>0$，すなわち，$\dfrac{1}{2}<t<1$ のとき　$f(\pi)<f(\theta)<f(0)$

(ii) $2t-1=0$，すなわち，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$f(\theta)=-\dfrac{5}{2}\neq 0$ より，条件を満たす．

(iii) $2t-1<0$，すなわち，$0<t<\dfrac{1}{2}$ のとき　$f(0)<f(\theta)<f(\pi)$

(i)，(iii) のとき，次式を満たせばよい．

$$f(0)f(\pi)=(-t-2)(-25t+10)\geqq 0 \quad \text{ゆえに}\quad (t+2)(5t-2)\geqq 0$$

$0<t<1$ において，これを解くと　$\dfrac{2}{5}\leqq t<1$

$t=\dfrac{1}{2}$ も条件を満たすことに注意して　$\boldsymbol{\dfrac{2}{5}\leqq t<1}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) (i) $a \neq 0$ のとき，$z+1=\dfrac{a}{z}$ であるから $(z \neq 0)$

$$z^2+z-a=0 \quad \text{ゆえに} \quad z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

(ii) $a=0$ のとき，$z+1=\dfrac{a}{z}=0$ より $(z \neq 0)$ $\quad z=-1$

よって $\boldsymbol{a \neq 0}$ **のとき** $\boldsymbol{z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}}$

$\boldsymbol{a=0}$ **のとき** $\boldsymbol{z=-1}$

(2) $\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$ より $(z \neq 0)$ $\quad z=a-|z|^2$

a，$|z|$ は実数より，z は実数であるから $\quad |z|^2=z^2$

ゆえに $\quad z=a-z^2 \quad$ すなわち $\quad z^2+z-a=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$1^2-4\cdot1(-a) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \geqq -\frac{1}{4}}$$

(3) $z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$ より，$\overline{z}(|z|^2+1)=\dfrac{a}{z}$ $(z \neq 0)$ であるから

$$|z|^2(|z|^2+1)=a \quad \text{ゆえに} \quad a=\left(|z|^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$|z|>0$ により $\quad \boldsymbol{a>0}$

■

$\boxed{\mathbf{6}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$A^2 - 2A + E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^{k+1} - A^k = A - E$$

$n > 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(A^{k+1} - A^k) = \sum_{k=1}^{n-1}(A - E)$ より

$$A^n - A = (n-1)(A - E) \quad \text{ゆえに} \quad A^n = n(A - E) + E$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$A^n = n\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

ゆえに，点 P_n は

$$\begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Q}(10,\ 10)$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n\mathrm{Q}^2 &= (n-9)^2 + (2n-9)^2 = 5n^2 - 54n + 162 \\ &= 5\left(n - \frac{27}{5}\right)^2 + \frac{81}{5} \end{aligned}$$

よって，求める n の値は　　$\boldsymbol{n = 5}$ ■