平成 22 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする．$y < x < a$ を満たすすべての x，y に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ．

2 a，b を正の実数とする．曲線 $C : y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ．

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする．2 つの接点を A，B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ．

3 1，2，3，4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる．まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする．取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする．このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる．得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ．

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ．

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ．

4 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする．以下の問いに答えよ．

(1) 等式
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$
を満たす点 P は存在するか．証明をつけて答えよ．

(2) 点 Q が等式
$$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$$
を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ．

(3) 点 R が等式
$$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$$
を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ．

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ．

5 $0<t<3$ のとき，連立不等式
$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t-y \end{cases}$$
の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする．

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ．

6 xy 平面において，原点を中心とし P(1, 0) を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする．A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 $(x,\ y)$ に対して，行列 A の表す移動
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
で得られる点 $(x',\ y')$ は X の辺上の点 (頂点を含む) であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ．また，そのときの行列 A を求めよ．

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ．また，そのときの行列 A を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x) > \dfrac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$ より $(y<x<a)$

$$\{(a-x)+(x-y)\}f(x) > (x-y)f(a)+(a-x)f(y)$$
$$(a-x)\{f(x)-f(y)\} > (x-y)\{f(a)-f(x)\}$$

$a-x>0,\ x-y>0$ に注意して $\quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \quad \cdots(*)$

$f(x)=x^3+3x^2-9x$ より

$$f(x)-f(y)=(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)-9(x-y)$$
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2+3(x+y)-9$$

上式を $(*)$ に適用すると

$$x^2+xy+y^2+3(x+y)-9 > a^2+ax+x^2+3(a+x)-9$$

整理すると $\quad (y-a)(x+y+a+3)>0 \quad$ ゆえに $\quad -x-y-a-3>0$

上の第 2 式から $\quad (a-x)+(a-y)-3a-3>0$

$a-x>0,\ a-y>0$ であるから，これが常に成立する条件は

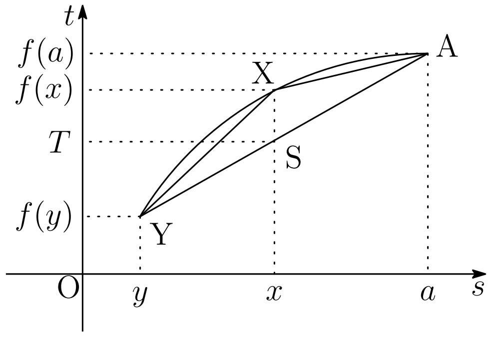
$$-3a-3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a \leqq -1}$$

解説 曲線 $t=f(s)$ 上の 2 点 $\mathrm{Y}(y,\ f(y))$，$\mathrm{A}(a,\ f(a))$ を通る直線の方程式は

$$t-f(y)=\frac{f(a)-f(y)}{a-y}(s-y) \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{(s-y)f(a)+(a-s)f(y)}{a-y}$$

直線 YA 上の点 $\mathrm{S}(x,\ T)$ について $\quad T=\dfrac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$

曲線 $t=f(s)$ 上の点 $\mathrm{X}(x,\ f(x))$ について，条件から，点 X は点 S より常に上側にある．したがって，この区間において，$t=f(s)$ は上に凸である．$f''(s)=6s+6$ より，$f''(s) \leqq 0$ となるのは，$s \leqq -1$．また，$(*)$ は，直線 YX，XA の傾きの大小関係を表している．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ より　　$y' = 3x^2 - a^2$

C 上の点 $(t,\ t^3 - a^2t + a^3)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t)$$

すなわち　　$y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 + a^3$

この直線上に点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ があるとき

$$0 = (3t^2 - a^2)b - 2t^3 + a^3 \quad \text{ゆえに} \quad 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 = 0$$

$f(t) = 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3$ とおくと

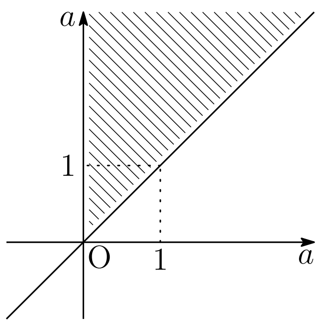
$$f'(t) = 6t^2 - 6bt = 6t(t - b)$$

$b > 0$ より，$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき，3 次方程式 $f(t) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもてばよいので，$f(0) > 0$，$f(b) < 0$ より

$$\begin{aligned} f(0) &= a^2b - a^3 = a^2(b - a) > 0, \\ f(b) &= -a^3 + a^2b - b^3 \\ &= -a^2(b - a) - b^3 < 0 \end{aligned}$$



点 $(a,\ b)$ の満たす条件は　　$b > a > 0$

よって，右の図の斜線部分で境界線を含まない．

(2) 点 P から曲線 C に接線が 2 本引ける，すなわち，方程式 $f(t) = 0$ がちょうど 2 つの実数解をもつのは，次の (i) または (ii) の場合である．

(i) $f(0) = 0$ のとき，$a^2(b - a) = 0$ より $(a > 0)$　$b = a$

(ii) $f(b) = 0$ のとき，$-a^3 + a^2b - b^3 = 0$ より　$a^3 - a^2b + b^3 = 0$

$a \geqq b > 0$ のとき　$a^3 - a^2b + b^3 = a^2(a - b) + b^3 > 0$

$b \geqq a > 0$ のとき　$a^3 - a^2b + b^3 = a^3 + b(b^2 - a^2) > 0$

したがって，$a^3 - a^2b + b^3 > 0$ となり，不適．

(i) の結果から，$b=a$ のとき，方程式 $f(t)=0$ は

$$2t^3-3at^2=0 \quad これを解いて \quad t=0,\ \frac{3a}{2}$$

C 上の $t=0,\ \dfrac{3a}{2}$ に対応する点をそれぞれ，A，B とすると

$$\mathrm{A}(0,\ a^3), \quad \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$$

このとき，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ であるから

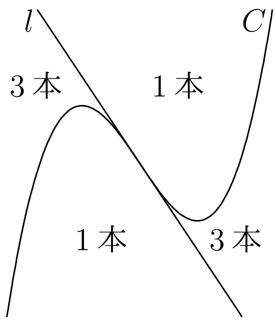
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-a,\ a^3)=a(-1,\ a^2), \quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\frac{a}{2},\ \frac{23}{8}a^3\right)=\frac{a}{2}\left(1,\ \frac{23}{4}a^3\right)$$

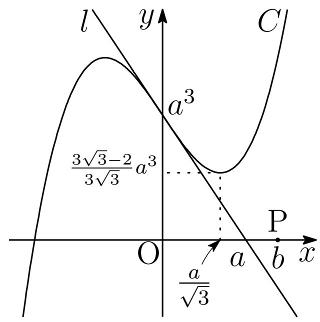
$\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}>0$ であるから

$$-1\cdot1+a^2\cdot\frac{23}{4}a^2>0 \quad ゆえに \quad a^4>\frac{4}{23} \quad よって \quad a>\sqrt[4]{\frac{4}{23}}$$

したがって，求める条件は　$\boldsymbol{b=a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}}$

解説 C の変曲点における接線を l とすると，座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は，C と l を境界とする領域によって左下の図のようになる．変曲点を除く C と l 上の点からは 2 本，変曲点からは 1 本引ける．





C 上の変曲点 $(0,\ a^3)$ における接線 l の方程式は　$y=-a^2x+a^3$

この接線と x 軸との交点の x 座標は　$x=a$

C が $x\geqq0$ において，$y\geqq0$ であることに注意すると，x 軸上の正の部分にある点 P から C に 3 本の接線が引けるのは，$b>a$ のときである．

C に P から 2 本の接線が引けるのは，変曲点を除く C または l 上に P があるときで，P は x 軸上の点 (x 座標は正) であるから，P は l と x 軸との交点 $(a,\ 0)$，A は変曲点 $(0,\ a^3)$ であることが分かる．■

$\boxed{3}$ (1) 1のカードを取り出す確率は $\dfrac{1}{4}$，1以外のカードを取り出す確率は $\dfrac{3}{4}$ であるから，5回取り出すとき，1のカードがちょうど2回現れる確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\mathbf{\frac{135}{512}} $$

(2) 1，2のカードを取り出す確率はともに $\dfrac{1}{4}$，1，2以外のカードを取り出す確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから，5回取り出すとき，1のカードと2のカードを1回ずつ取り出す確率は

$$ \frac{5!}{1!1!3!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{5}{32}} $$

(3) 2回現れる数字が1種類以上となるのは，次の場合がある．

(i) 2回現れる数字が1つで，それ以外の数字が1回ずつ．(2回現れる数字Aに対してそれ以外の数字B，C，Dは一意的に定まる)

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{5!}{2!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=2\cdot\frac{5!}{4^5} $$

(ii) 2回現れる数字が2つで，それ以外の数字が1回．(2回現れる数字A，Bの選び方 ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，それ以外の数字Cの選び方は2通り)

$$ {}_4\mathrm{C}_2\cdot2\cdot\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=3\cdot\frac{5!}{4^5} $$

(iii) 2回現れる数字が1つと3回現れる数字が1つ．(2回現れる数字A，3回現れる数字Bの選び方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り)

$$ {}_4\mathrm{P}_2\cdot\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{5!}{4^5} $$

(i),(ii),(iii) より　$(2+3+1)\dfrac{5!}{4^5}=\mathbf{\dfrac{45}{64}}$ ■

4 (1) 辺 AB の中点が M，辺 CD の中点が N であるから

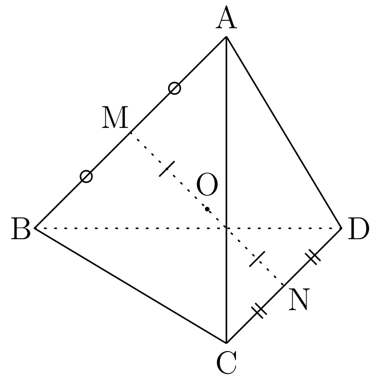
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{PN}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}$$

等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ が存在するとき

$$2\overrightarrow{\mathrm{PM}}=2\overrightarrow{\mathrm{PN}}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{PN}}-\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\vec{0}$ となり，不適．よって，等式を満たす点 P は存在しない．

(2) 2 点 M，N の中点を O とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\\&=2(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}),\\\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})+(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\\&=2(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$$

上式の両辺を平方すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ に注意して，整理すると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$$

よって，Q は 2 点 M，N の中点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ に垂直な平面を描く．

(3) $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$，$\mathrm{M}(\vec{m})$，$\mathrm{N}(\vec{n})$，$\mathrm{R}(\vec{r})$ とし，これを等式

$$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$$

に代入すると

$$\begin{gathered}|\vec{a}-\vec{r}|^2+|\vec{b}-\vec{r}|^2=|\vec{c}-\vec{r}|^2+|\vec{d}-\vec{r}|^2\\|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{r}=|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2(\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{r}\end{gathered}$$

$\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}$，$\vec{c}+\vec{d}=2\vec{n}$ であるから

$$4(\vec{n}-\vec{m})\cdot\vec{r}=-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\vec{n}-\vec{m}$ に注意して　$4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{r}=-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2\quad\cdots(*)$

$(*)$ の位置ベクトルの始点を M とすると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}} = -|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MD}}|^2$$

よって，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定である．

(4) $(*)$ の位置ベクトルの始点を O とすると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2) + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 \qquad \cdots(**)$$

このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\\ &= 2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 + 2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 = 2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2,\\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2\\ &= 2|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2 + 2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2 = 2|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\end{aligned}$$

上の 2 式を $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ に注意して，$(**)$ に代入すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2)$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}| \iff \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 0$

これと (2) の結果から，点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ である．

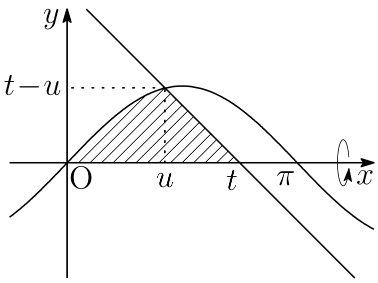
補足 (2) は，$|\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ より

$$|2\overrightarrow{\mathrm{QM}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{QN}}| \quad \text{すなわち} \quad |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{NQ}}|$$

よって，点 Q は 2 点 M，N から等距離にある，すなわち，線分 MN の垂直二等分面を描く．(これでもよいが，(4) との形式を合わせるために先の解答を与えた．) ■

5 $0<t<3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t-y \end{cases}$$



の表す領域は，右の図の斜線部分である．このとき，曲線 $y=\sin x$ と直線 $x=t-y$ の共有点の x 座標を u とすると

$$u=t-\sin u \quad \text{ゆえに} \quad t=u+\sin u \quad \text{したがって} \quad \frac{dt}{du}=1+\cos u$$

図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させた立体の体積 $V(t)$ は

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi\int_0^u \sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-u)^2\cdot(t-u)=\pi\int_0^u \sin^2 x\,dx+\frac{\pi}{3}\sin^3 u \qquad \cdots(*) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^u (1-\cos 2x)\,dx+\frac{\pi}{3}\sin^3 u=\frac{\pi}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^u+\frac{\pi}{3}\sin^3 u \\ &= \pi\left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin 2u+\frac{1}{3}\sin^3 u\right) \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

$(*)$ を t について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \pi\sin^2 u\frac{du}{dt}+\pi\sin^2 u\cos u\frac{du}{dt} \\ &= \pi\sin^2 u(1+\cos u)\frac{du}{dt}=\pi\sin^2 u \end{aligned}$$

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$\pi\sin^2 u=\dfrac{\pi}{4}$　　$0\leqq u<3$ であるから，$\sin u>0$ より

$$\sin u=\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad u=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

(i) $u=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$t=\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{6}<3$　(適する)

(ii) $u=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　$t=\dfrac{5}{6}\pi+\sin\dfrac{5}{6}\pi>\dfrac{5}{6}\cdot 3+\dfrac{1}{2}=3$　(不適)

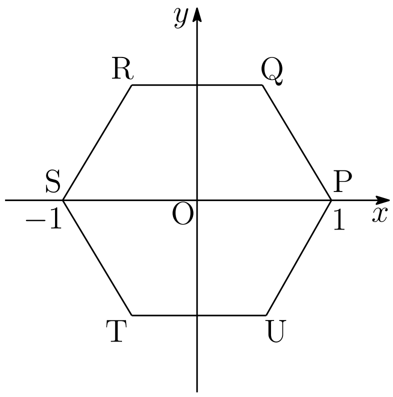
よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}}$　$(**)$ に $u=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると

$$V(t)=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)=\boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{24}\right)}$$

■

$\boxed{6}$ (1) A の表す線形写像を f とする．X 上の一辺を点 x が移動するとき，その像 $f(\mathrm{x})$ は，一定の方向に移動するので，X の頂点は，f によっていずれかの頂点に移動する．条件により $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$，P から Q を移動す点 $(1-t)\mathrm{P}+t\mathrm{Q}$ の像 $(1-t)f(\mathrm{P}) + tf(\mathrm{Q})$ が X 上にあるから $(0 \leqq t \leqq 1)$，$f(\mathrm{Q})$ は Q または U である．したがって

$$f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q} \text{ のとき } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad f(\mathrm{Q}) = \mathrm{U} \text{ のとき } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$



(2) X の異なる 2 点 x_1，x_2 について，$f(\mathrm{x}_1) \neq f(\mathrm{x}_2)$ である．実際，$f(\mathrm{x}_1) = f(\mathrm{x}_2)$ とすると，$\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 \neq \vec{0}$ に対して $f(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) = \vec{0}$ となり，X の f による像は直線に退化するので，条件に反する．隣り合う 2 点を結ぶ線分の像は，f の線形性により，その像も隣り合う 2 辺に移る．したがって，f は原点の回りに $\frac{n\pi}{3}$ だけの回転および x 軸 (または y 軸) に関する鏡像変換の合成変換であるから

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} & -\cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

である $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$．■