

平成21年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

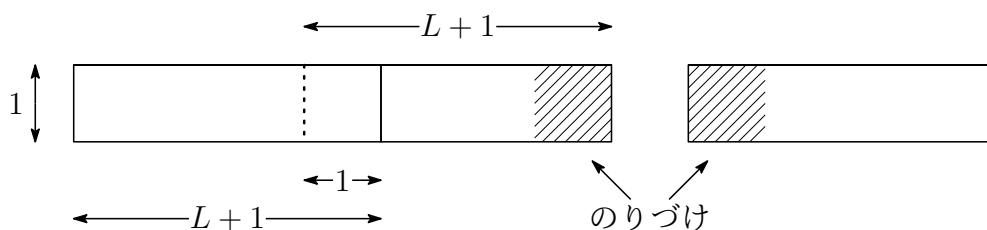
1 a, b, c を実数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $a + b = c$ であるとき, $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ.

(2) $a + b \geq c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ.

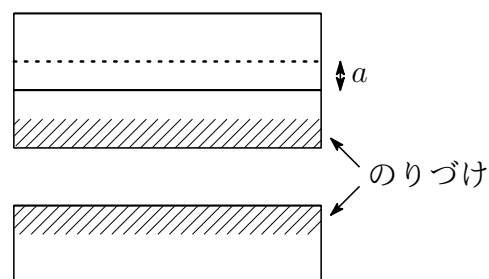
2 L を2以上の自然数, a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする. 縦1cm, 横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて, 次のように長方形 A, B を作る.

長方形 A の作り方. L 枚の紙を横に並べて, 順に1辺1cmの正方形をのりしろとして(隣り合う紙が横1cm重なるように)はり合わせ, 縦1cmの横長の長方形を作る.



長方形 B の作り方. L 枚の紙を縦に並べて, 隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて, 横 $(L+1)$ cm の長方形を作る.

長方形 A, B の面積をそれぞれ $S_1 \text{ cm}^2$ および $S_2 \text{ cm}^2$ とおくと, 以下の問いに答えよ.



(1) S_1 と S_2 を求めよ.

(2) $L = 2$ のとき, $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ.

(3) $S_1 - 1 < S_2$ となる2以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ.

3 袋の中に青玉が7個, 赤玉が3個入っている. 袋から1回につき1個ずつ玉を取り出す. 一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ.

(1) 4回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ.

(2) 8回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ.

(3) 赤玉がちょうど8回目ですべて取り出される確率を求めよ.

(4) 4回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ.

4 a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく．すなわち，

$$\begin{aligned} \sin \theta &\geq \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin \theta \\ \sin \theta &< \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin(\theta - 2a) \end{aligned}$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える．このとき定積分

$$I = \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

を求めよ．

- (2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき，(1) の I の最大値を求めよ．

5 a, b, c, d, p, q は $ad - bc > 0, p > 0, q > 0$ を満たす実数とする．2つの行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ が $APA = P^2$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) $P^3A = AP^3$ が成り立つことを示せ．
 (2) A を p と q で表せ．

6 実数 a に対して， x の方程式

$$|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$$

が，相異なる4つの実数解をもつような a の範囲を求めよ．

解答例

1 (1) $c = a + b$ のとき

$$c^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = a^3 + b^3 + 3abc$$

(2) $X = a + b$ とおくと, $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = X^3 - 3abX$ より

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc - c^3 &= X^3 - 3abX + 3abc - c^3 \\ &= (X - c)(X^2 + cX + c^2) - 3ab(X - c) \\ &= (X - c)(X^2 + cX + c^2 - 3ab) \\ &= (a + b - c)\{(a + b)^2 + c(a + b) + c^2 - 3ab\} \\ &= \frac{1}{2}(a + b - c)\{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} \end{aligned}$$

$a + b \geq c$ のとき, $a + b - c \geq 0$ であるから, 上式より

$$a^3 + b^3 + 3abc - c^3 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$$

補足 次式の変形を利用し, これに $x = a$, $y = b$, $z = -c$ を適用してもよい.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \end{aligned}$$



- 2** (1) 長方形 A について, L 枚の面積の総和は $L(L+1)$ で, L 枚の重なる部分の面積は $L-1$ であるから

$$S_1 = L(L+1) - (L-1) = L^2 + 1$$

長方形 B について, L 枚の面積の総和は $L(L+1)$ で, L 枚の重なる部分の $L-1$ 箇所のそれぞれ面積は $a(L+1)$ であるから

$$S_2 = L(L+1) - (L-1) \cdot a(L+1) = (1-a)L^2 + L + a$$

- (2) (1) の結果から, $L=2$ のとき, $S_1=5$, $S_2=6-3a$
これらを $S_1-1 < S_2$ に代入すると

$$5-1 < 6-3a \quad \text{これを解いて} \quad a < \frac{2}{3}$$

$$0 < a < 1 \text{ に注意して} \quad 0 < a < \frac{2}{3}$$

- (3) (1) の結果を $S_1-1 < S_2$ に代入すると

$$(L^2+1)-1 < (1-a)L^2+L+a \quad \text{すなわち} \quad aL^2-L-a < 0$$

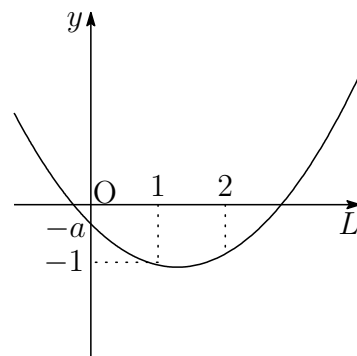
$f(L) = aL^2 - L - a$ とおくと, 2 次関数

$$y = f(L)$$

のグラフは, 点 $(1, -1)$ を通る. $f(L) < 0$ を満たす 2 以上の自然数 L が存在する条件は, $f(2) < 0$ であるから

$$a \cdot 2^2 - 2 - a < 0$$

$$0 < a < 1 \text{ に注意して} \quad 0 < a < \frac{2}{3}$$



3 (1) 求める確率は $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$

別解 青玉 7 個，赤玉 3 個の計 10 個を取り出す場合の総数は (10 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{10!}{7!3!} = 120 \text{ (通り)}$$

取り出した玉を一列に並べたとき，1 番目から 4 番目までが青青青赤で，5 番目以降に青 4 個，赤 2 個が並ぶ場合の総数は

青	青	青	赤						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

(2) 取り出した玉を一列に並べたとき，9 番目と 10 番目が青で，1 番目から 8 番目までに青 5 個と赤 3 個を並べる場合の総数は

								青	青
--	--	--	--	--	--	--	--	---	---

$$\frac{8!}{5!3!} = 56 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

(3) 取り出した玉を一列に並べたとき，8 番目が赤，9 番目と 10 番目が青で，1 番目から 7 番目までに青 5 個と赤 2 個を並べる場合の総数は

							赤	青	青
--	--	--	--	--	--	--	---	---	---

$$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

(4) 4 回目までに赤玉が取り出される個数を k とすると ($k = 0, 1, 2, 3$)，このときの確率を p_k とすると

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{4!}{k!(4-k)!} \times \frac{6!}{(3-k)!(3+k)!} \times \frac{3!7!}{10!} \\ &= \frac{144}{k!(4-k)!(3-k)!(3+k)!} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad p_0 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{3}{10}, \quad p_3 = \frac{1}{30}$$

$$\text{よって，求める期待値は} \quad 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$$



4 (1) $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta - \sin(\theta - 2a) = 2 \cos(\theta - a) \sin a$ より

$$0 \leq \theta \leq a + \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \sin \theta - \sin(\theta - 2a) \geq 0$$

$$a + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } \sin \theta - \sin(\theta - 2a) \leq 0$$

ゆえに
$$f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & \left(0 \leq \theta \leq a + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(\theta - 2a) & \left(a + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \end{cases}$$

したがって、求める定積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi f(\theta) d\theta = \int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \int_{a+\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(\theta - 2a) d\theta \\ &= \left[-\cos \theta\right]_0^{a+\frac{\pi}{2}} + \left[-\cos(\theta - 2a)\right]_{a+\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= -\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + 1 - \cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= \cos 2a + 2 \sin a + 1 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} I &= (1 - 2 \sin^2 a) + 2 \sin a + 1 \\ &= -2 \sin^2 a + 2 \sin a + 2 \\ &= -2 \left(\sin a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ より, $a = \frac{\pi}{6}$ のとき, I は最大値 $\frac{5}{2}$ をとる. ■

5 (1) $APA = P^2$ より

$$P^3A = (P^2)PA = (APA)PA = AP(APA) = AP(P^2) = AP^3$$

(2) $APA = P^2$ および $|A| \neq 0$ であるから, $AP = P^2A^{-1}$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| \begin{pmatrix} ap & bq \\ cp & dq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2d & -p^2b \\ -q^2c & q^2a \end{pmatrix}$$

成分を比較すると

$$|A|ap = p^2d, \quad |A|bq = -p^2b, \quad |A|cp = -q^2c, \quad |A|dq = q^2a$$

$p, q \neq 0$ であるから

$$\begin{cases} |A|a = pd & \cdots \textcircled{1} \\ b(|A|q + p^2) = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ c(|A|p + q^2) = 0 & \cdots \textcircled{3} \\ |A|d = qa & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$p, q, |A| > 0$ であるから, $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

$$b = c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |A| = ad > 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{5}$ を $\textcircled{1}, \textcircled{4}$ に代入すると

$$ad \cdot a = pd, \quad ad \cdot d = qa \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = p, \quad d^2 = q$$

$\textcircled{5}$ より, a と d が同符号であることに注意して

$$a = \pm\sqrt{p}, \quad d = \pm\sqrt{q} \quad (\text{複合同順})$$

よって
$$A = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

■

6 $f(x) = |x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1$ とおくと

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(a-1)x - 8a - 1 & (x < 0) \\ -x^2 + 2(3a+1)x - 8a - 1 & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2 - (a+1)x + 8a - 1 & (2 < x) \end{cases}$$

とくに, $f(0) = -8a - 1$, $f(2) = 4a - 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

方程式 $f(x) = 0$ の $x < 0$, $0 \leq x \leq 2$, $2 < x$ の範囲における解の個数をそれぞれ L , M , N とする.

[I] $x < 0$ のとき, $f(x) = (x+a-1)^2 - a^2 - 6a - 2$ より

(i) $-a+1 \leq 0$, すなわち, $a \geq 1$ のとき

x	$\cdots$	$-a+1$	$\cdots$	0
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$

このとき, $f(0) < 0$ であるから $L = 1$

(ii) $-a+1 \geq 0$, すなわち, $a \leq 1$ のとき

x	$\cdots$	0
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$

$f(0) \geq 0$, すなわち, $a \leq -\frac{1}{8}$ のとき $L = 0$

$f(0) < 0$, すなわち, $-\frac{1}{8} < a \leq 1$ のとき $L = 1$

(i),(ii) より

a	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$
L	0	0	1

[II] $0 \leq x \leq 2$ のとき, $f(x) = -(x - 3a - 1)^2 + a(9a - 2)$

(i) $3a + 1 \leq 0$, すなわち, $a \leq -\frac{1}{3}$ のとき

x	0	$\cdots$	2
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$

このとき, $f(0) > 0$, $f(2) < 0$ であるから $M = 1$

(ii) $0 \leq 3a + 1 \leq 2$, すなわち, $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$ のとき

x	0	$\cdots$	$3a + 1$	$\cdots$	2
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) > 0 \quad (-\frac{1}{3} \leq a < -\frac{1}{8}) \\ f(0) = 0 \quad (a = -\frac{1}{8}) \\ f(0) < 0 \quad (-\frac{1}{8} < a \leq \frac{1}{3}) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(2) < 0 \quad (-\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{4}) \\ f(2) = 0 \quad (a = \frac{1}{4}) \\ f(2) > 0 \quad (\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(3a + 1) > 0 \quad (-\frac{1}{3} \leq a < 0) \\ f(3a + 1) = 0 \quad (a = 0) \\ f(3a + 1) < 0 \quad (0 < a < \frac{2}{9}) \\ f(3a + 1) = 0 \quad (a = \frac{2}{9}) \\ f(3a + 1) > 0 \quad (\frac{2}{9} < a \leq \frac{1}{3}) \end{array} \right.$$

a	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
M	1	1	2	2	1	0	1	2	2	1	1

(iii) $2 \leq 3a + 1$, すなわち, $\frac{1}{3} \leq a$ のとき

x	0	$\cdots$	2
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$

このとき, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$ であるから $M = 1$

(i),(ii),(iii) より

a	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
M	1	2	2	1	0	1	2	2	1

[III] $2 < x$ のとき, $f(x) = (x - a - 1)^2 - a^2 + 6a - 2$

(i) $a + 1 \leq 2$, すなわち, $a \leq 1$ のとき

x	2	...
$f(x)$	$f(2)$	$\nearrow$

$$\begin{cases} f(2) < 0 & (a < \frac{1}{4}) \\ f(2) = 0 & (a = \frac{1}{4}) \\ f(2) > 0 & (\frac{1}{4} < a \leq 1) \end{cases}$$

(ii) $2 \leq a + 1$, すなわち, $1 \leq a$ のとき $f(2) > 0$

x	2	...	$a + 1$	...
$f(x)$	$f(2)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{cases} f(a + 1) > 0 & (1 \leq a < 3 + \sqrt{7}) \\ f(a + 1) = 0 & (a = 3 + \sqrt{7}) \\ f(a + 1) < 0 & (3 + \sqrt{7} < a) \end{cases}$$

(i),(ii) より

a	...	$\frac{1}{4}$	...	$3 + \sqrt{7}$	...
N	1	0	0	1	2

[I] , [II] , [III] より

a	...	$-\frac{1}{8}$	...	0	...	$\frac{2}{9}$	...	$\frac{1}{4}$	...	$3 + \sqrt{7}$	...
L	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	1	2	2	1	0	1	2	2	1	1	1
N	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
$L + M + N$	2	3	4	3	2	3	4	3	2	3	4

$L + M + N = 4$ となる a の値の範囲であるから

$$-\frac{1}{8} < a < 0, \quad \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4}, \quad 3 + \sqrt{7} < a$$

■