

平成18年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

- 理・工学部は, 1 2 3 4 5 6 数I・II・III・A・B・C (150分)
- 医[医, 保健(放射線技術・検査技術)学科]・歯・薬・農学部は, 1 2 3 4 数I・II・III・A・B・C (100分)

1 連立不等式

$$x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0, \quad x + y \leq 5$$

の表す領域 D を図示せよ. また, 曲線

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$$

が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ.

- 2 図-1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える. この四角形 $ABCD$ を AC で折り, 図-2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く. 図-2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α , $\alpha = \angle BCD$, とし $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする. 以下の問いに答えよ.

- 図-2 において, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ.
- $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ.
- H が図-2 における $\triangle BCD$ の重心となるとき, 角度 α を求めよ.

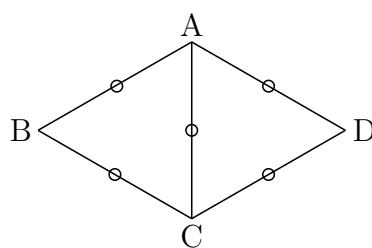


図-1

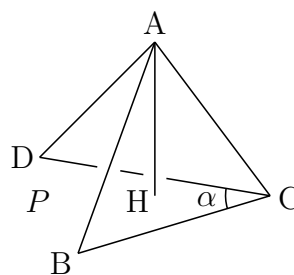


図-2

3 ある商店街が次のようなくじを計画した．商店街の各商店は 1000 円の買い物ごとに 1 枚の抽選券を客に配布し，また，配布した抽選券を 1 枚につき手数料 35 円をくじを管理する組合に拠出する．客は抽選券の枚数と同じ回数なくじを引くことができる．くじは 500 個の球の入った袋をよくかきまぜて 1 個を取り出す方法で行われ，500 個の球のうち 1 個だけが当たりとし，取り出された球はそのつど袋に戻すことにする．そして，当たり球が出たならば 1 万円相当の景品がもらえ，外れたならば景品は無いことにする．以下の問に答えよ．

- (1) 10 枚の抽選券を使ってくじを引く人がもらえる景品の相当額の期待値を求めよ．
- (2) それぞれが 4 枚の抽選券を使ってくじを引く客が 2 人いるとする．各人が 4 回なくじを引いたとき，当たり外れの順序が完全に一致する確率を求めよ．ただし，小数点第 3 位は四捨五入せよ．
- (3) くじに要する経費は，抽選券の配布枚数に関係のない管理運営費 30 万円と景品代との合計であるとする．くじ管理組合に拠出されたお金でくじに要する経費の期待値がまかなえるためには，商店街全体としての商品売り上げ目標をいくら以上にすればよいか．

4 $x > 0$ において，関数

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$$

を考える．関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし，以下の問に答えよ．

- (1) $f'(2)$ を求め， $x > 2$ のとき $f'(x) < 1$ であることを示せ．
- (2) k が自然数のとき， $f'\left(\frac{1}{k}\right)$ を求めよ．
- (3) $f'(x) = 1$ となる x を値の大きいものから順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とおく．
 $n \geq 2$ である自然数 n に対して， $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ を示せ．
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ を求めよ．

5 3次正方行列 A, B, O を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問に答えよ。

- (1) 2以上の自然数 k に対して、 $(A+B)^k$ を求めよ。
- (2) すべての自然数 m, n に対して、 $A^m B^n$ および $B^n A^m$ を求めよ。
- (3) 等式 $(A+B)X = X(A+B) = O$ を満たす3次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \text{ を求めよ。}$$

6 連立不等式 $1 \leq x \leq 2, y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また、 a を定数とし、不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問に答えよ。

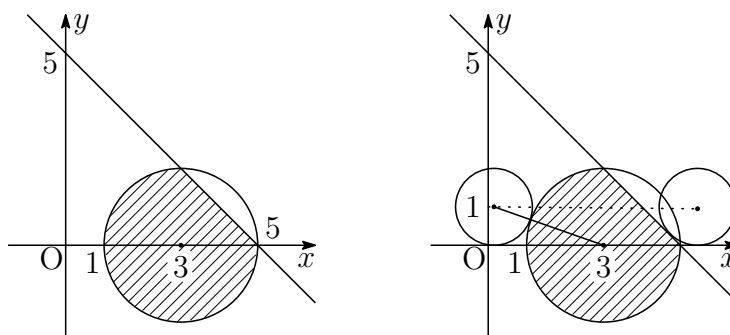
- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲の a に対して、 D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

解答例

1 $x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0, x + y \leq 5$ より

$$(x - 3)^2 + y^2 \leq 4, \quad y \leq -x + 5$$

この連立不等式の表す領域 D は左下の図の斜線部分で、境界線を含む。



曲線 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$ は円 $C : (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 1$ である。

a が最大となるのは、円 C が直線 $x + y = 5$ と右上の図のように接する、すなわち、 C の中心 $(a, 1)$ から直線 $x + y - 5 = 0$ までの距離が 1 のとき (ただし、 $a + 1 - 5 > 0$)

$$\frac{|a + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4 + \sqrt{2}$$

a が最小となるのは、右上の図のように 2 円が接する、すなわち、2 点 $(3, 0)$, $(a, 1)$ の距離が 2 円の半径の和 $2 + 1$ に等しいとき (ただし、 $a < 3$)

$$\sqrt{(a - 3)^2 + 1^2} = 2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3 - 2\sqrt{2}$$

よって 最大値 $4 + \sqrt{2}$, 最小値 $3 - 2\sqrt{2}$



2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CH} = x\vec{b} + y\vec{d}$ とおくと

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA} = x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{b} \perp \overrightarrow{AH}$, $\vec{d} \perp \overrightarrow{AH}$ であるから, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, $\vec{d} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ より

$$\vec{b} \cdot (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{d} \cdot (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a}) = 0$$

$$|\vec{b}| = |\vec{d}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 1 \cos \alpha = \cos \alpha \text{ より}$$

$$x + y \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad x \cos \alpha + y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = y = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA}$$

別解 $(\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0$ より, 直交する単位ベクトルを

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{|\vec{b} + \vec{d}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b} - \vec{d}}{|\vec{b} - \vec{d}|}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} &= \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 \\ &= \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d})}{|\vec{b} + \vec{d}|^2} (\vec{b} + \vec{d}) + \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{d})}{|\vec{b} - \vec{d}|^2} (\vec{b} - \vec{d}) \end{aligned}$$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 1$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0$, $|\vec{b} + \vec{d}|^2 = 2(1 + \cos \alpha)$ であるから

$$\overrightarrow{HA} = \vec{a} - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\vec{b} + \vec{d})$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA}$$

(2) $\overrightarrow{AH} = x(\vec{b} + \vec{d}) - \vec{a}$, $|\vec{b} + \vec{d}|^2 = \frac{1}{x}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 1$ に注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AH}|^2 &= x^2 |\vec{b} + \vec{d}|^2 - 2x \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - x = 1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} \end{aligned}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}}$$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2(1 + \cos \alpha)}$

$|\vec{b} + \vec{d}|^2 = 2(1 + \cos \alpha)$ であるから

$$|\overrightarrow{CH}|^2 = \frac{|\vec{b} + \vec{d}|^2}{4(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

よって $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{CH}|^2}$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}}$$

(3) $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2(1 + \cos \alpha)}$

H が図-2 の $\triangle BCD$ の重心であるとき $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3}$

したがって $2(1 + \cos \alpha) = 3$ ゆえに $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

よって $\alpha = \frac{\pi}{3}$



3 (1) 1 回の試行で当たる確率 $p = \frac{1}{500}$

10 回の試行で当たる枚数の期待値は $10p = \frac{1}{50}$

したがって、10 回の試行で得られる相当額の期待値は

$$10000 \times \frac{1}{50} = \mathbf{200} \text{ (円)}$$

(2) $p = \frac{1}{500}$, $q = 1 - p$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^4 {}_4C_k (p^2)^k (q^2)^{4-k} &= (p^2 + q^2)^4 = \{p^2 + (1-p)^2\}^4 \\ &= \{1 - 2p(1-p)\}^4\end{aligned}$$

ここで, $h = 2p(1-p)$ とおくと

$$(1-h)^4 = 1 - 4h + 6h^2 - 4h^3 + h^4$$

したがって $(1-h)^4 - (1-4h) = h^2(6-4h+h^2)$

$0 < h < 1$, $h^2 < h$ であることに注意して

$$\begin{aligned}|(1-h)^4 - (1-4h)| &= h^2(6-4h+h^2) \\ &< h^2(6-4h+h) = 3h^2(2-h) \\ &< 6h^2 = 6\{2p(1-p)\}^2 \\ &< 24p^2(1-p)^2 \\ &< 24p^2 = 24\left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{24}{25} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}1 - 4h &= 1 - 4 \cdot 2p(1-p) = 1 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{499}{500} \\ &= 1 - \frac{32 \times 499}{10^6} = 1 - \frac{15968}{10^6} = \frac{984032}{1000000} = 0.984032\end{aligned}$$

よって, 求める確率は **0.98**

補足 本題の解答の精度から, 小数第4位を四捨五入すると 0.984

(3) 抽選券の配布枚数を n とすると, 満たすべき条件は

$$35n \geq 30 \times 10^4 + n \times \frac{1}{500} \times 10^4 \quad \text{これを解いて} \quad n \geq 2 \times 10^4$$

このとき, 売上目標は $2 \times 10^4 \times 10^3 = 2 \times 10^7$ よって **2000 万円以上**



4 (1) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ より $f'(x) = \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} \quad \cdots (*)$

$$f'(2) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

ここで, $g(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta$ とおくと $g'(\theta) = \theta \sin \theta \quad \cdots (**)$

$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $g'(\theta) \geq 0$ であるから

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ において } 0 < g(\theta) < 1$$

$\theta = \frac{\pi}{x}$ とおくと, $g(\theta) = f'(x)$ であるから

$x > 2$ において $0 < f'(x) < 1$ よって $x > 2$ において $f'(x) < 1$

(2) $(*)$ より $f'\left(\frac{1}{k}\right) = \sin k\pi - k\pi \cos k\pi$

k は自然数であるから $f'\left(\frac{1}{k}\right) = -k\pi(-1)^k$

(3) k を自然数とすると, $(**)$ より

x	$\cdots$	$2(k-1)\pi$	$\cdots$	$(2k-1)\pi$	$\cdots$	$2k\pi$	$\cdots$
$g'(\theta)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\theta)$	$\searrow$	$-2(k-1)\pi$	$\nearrow$	$(2k-1)\pi$	$\searrow$	$-2k\pi$	$\nearrow$

$g(\theta)$ は区間 $[2(k-1)\pi, (2k-1)\pi]$ において単調増加, $g(2(k-1)\pi) \leq 0$,
 $g((2k-1)\pi) > 1$ であるから

$$g(\theta_{2k-1}) = 1, \quad 2(k-1)\pi < \theta_{2k-1} < (2k-1)\pi$$

を満たす θ_{2k-1} がただ1つ存在する.

$g(\theta)$ は区間 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ において単調減少, $g((2k-1)\pi) > 1$,
 $g(2k\pi) \leq 0$ であるから

$$g(\theta_{2k}) = 1, \quad (2k-1)\pi < \theta_{2k} < 2k\pi$$

を満たす θ_{2k} がただ1つ存在する. n を自然数とすると

$$g(\theta_n) = 1, \quad (n-1)\pi < \theta_n < n\pi$$

を満たす θ_n がただ1つ存在する.

$\theta_n = \frac{\pi}{x_n}$ とおくと, $g(\theta_n) = f(x_n) = 1$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$(n-1)\pi < \frac{\pi}{x_n} < n\pi \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$$

(4) (3) の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, また, $\left| \sin \frac{\pi}{x_n} \right| \leq 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ ■

5 (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A + B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A + B)^3 = (A + B)^2$ であるから, 2 以上の自然数 k について

$$(A + B)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) まず, A^2 , B^2 , AB , BA を計算すると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A$ より, すべての自然数 m について, $A^m = A$ であるから

$$A^m B^n = AB^n, \quad B^n A^m = B^n A$$

次に, AB^2 , B^2A を計算すると

$$AB^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

$$B^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

以上の結果から

$$n = 1 \text{ のとき } A^m B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 2 \text{ のとき } A^m B^n = O$$

$$n = 1 \text{ のとき } B^n A^m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 2 \text{ のとき } B^n A^m = O$$

(3) $(A + B)X = X(A + B) = O$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & x_2 \\ 0 & y_1 + y_2 & y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分を比較して $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3$

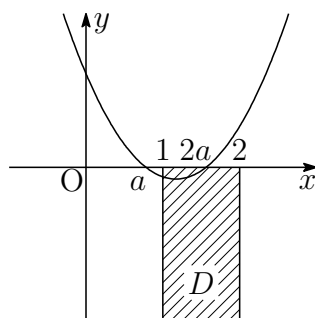
$$\text{よって } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_3 \text{ は任意})$$

■

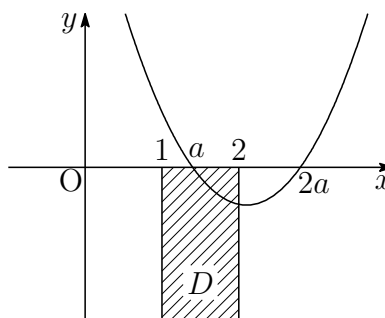
6 (1) $y \geq (x-a)(x-2a)$ から、条件を満たす a の値の範囲は次の場合である.

$$(i) 1 \leq 2a \leq 2, \text{ すなわち, } \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \quad (ii) 1 \leq a \leq 2$$

$$(i) 1 \leq 2a \leq 2$$



$$(ii) 1 \leq a \leq 2$$



$$(i) \text{ または } (ii) \text{ の範囲より } \frac{1}{2} \leq a \leq 2$$

$$(2) (i) \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= - \int_1^{2a} (x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_1^{2a} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$(ii) 1 \leq a \leq 2 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= - \int_a^2 (x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_a^2 \\ &= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(3) (i) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S'(a) &= -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(4a^2 - 8a + 3) \\ &= -\frac{1}{2}(2a - 1)(2a - 3) \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6 = \frac{1}{2}(5a^2 - 16a + 12) \\ &= \frac{1}{2}(a - 2)(5a - 6) \end{aligned}$$

(i), (ii) より, $S(a)$ の増減表は次のようになる.

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, 求める最大値は $S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75}$

