# 平成 17 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
# 理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

- 理・工学部は，[1] [2] [3] [4] [5] [6] 数 I・II・III・A・B・C (150 分)
- 医 [医，保健 (放射線技術・検査技術) 学科]・歯・薬・農学部は，[1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (100 分)

**1** $0 < t < \dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i) $(1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e}$

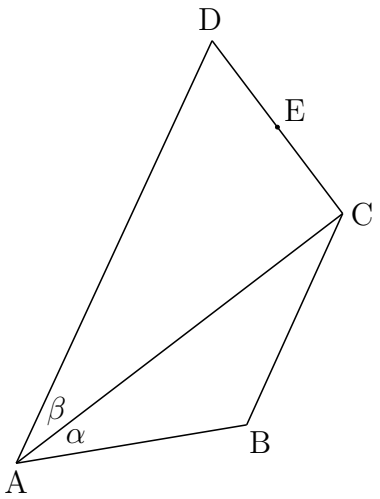
(ii) $(1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$

を満たすとする．さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする．このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を $t$ で表せ．

**2** すべての内角が 180° より小さい四角形 ABCD がある．辺の長さが AB = BC = $r$，AD = $2r$ とする．さらに，辺 CD 上の点 E があり，3 つの三角形 △ABC，△ACE，△ADE の面積はすべて等しいとする．$\alpha = \angle\mathrm{BAC}$，$\beta = \angle\mathrm{CAD}$ とおく．

(1) $\alpha = \beta$ を示せ．

(2) $\cos\angle\mathrm{DAB} = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle\mathrm{CAE}$ の値を求めよ．



**3** 1 から $n$ までの数字を 1 つずつ書いた $n$ 枚のカードが箱に入っている．この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す．ただし，$k$ 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に，$k$ を得点として終了する．

(1) $2 \leqq k \leqq n+1$ を満たす自然数 $k$ について，得点が $k$ となる確率を求めよ．

(2) 得点の期待値を $n$ で表した式を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ および極限値 $\lim_{n\to\infty} f(n)$ を求めよ．

**4** $a$ を負の実数とし，放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ を考える．$C_1$ が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \dfrac{3}{4} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2x + \dfrac{3}{4} & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき，$C_1$ と $C_2$ で囲まれた図形の面積を $a$ で表せ．

**5** $a$，$b$ を $a^2 \neq b^2$ を満たす 0 でない実数とし，$A_n$ を次の関係式で定まる 2 次の正方行列とする．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{n+1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) 行列 $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で

$$C\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ．

(2) $A_n$ を $a$, $b$, $n$ で表せ．

(3) $n \to \infty$ のとき $A_n$ のすべての成分が収束するための条件を求めよ．

**6** $a$ を $0 < a < 1$ を満たす定数とし，

$$f(x) = \frac{\cos 2x - 2}{a\cos x + 1}$$

とする．

(1) $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq \pi$ で減少関数となる $a$ の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ．

解答例

**1** $0<t<\dfrac{1}{2}$，(i)，(ii) より，$\vec{a}=\dfrac{t}{1-t}\vec{e}$，$\vec{b}=\dfrac{1-t}{t}\vec{e}$ $\cdots(*)$

$$(1-t)^2\vec{a}=t^2\vec{b},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1 \quad \cdots(**)$$

$|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ より $(1-t)|\vec{x}-\vec{a}|=t|\vec{x}-\vec{b}|$

$$(1-t)^2(|\vec{x}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2)=t^2(|\vec{x}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{b}|^2)$$

$(*)$，$(**)$ より $(1-t)^2|\vec{x}|^2+t^2=t^2|\vec{x}|^2+(1-t)^2$

$$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{x}|=1 \quad \cdots①$$

$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ より $|\vec{x}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(*)$，$(**)$ および ① から

$$2-\left(\frac{t}{1-t}+\frac{1-t}{t}\right)\vec{e}\cdot\vec{x}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{2t^2-2t+1}}$$

■

**2** (1) $\triangle ABC = \triangle ACE = \triangle ADE$ より　$\triangle ACD = 2\triangle ABC$

$$\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\sin\beta = 2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha$$

したがって　$\dfrac{1}{2}AC\cdot 2r\sin\beta = 2\cdot\dfrac{1}{2}r\cdot AC\sin\alpha$　ゆえに　$\sin\alpha = \sin\beta$

$\alpha+\beta < 180^\circ$ であるから，$\beta \neq 180^\circ - \alpha$ に注意すると　$\alpha = \beta$

(2) $\triangle ACE = \triangle ADE$ より　$CE = DE$

線分 AB の B の延長上に $AD' = AD = 2r$ となる点 D′ をとると，(1) の結果より，$\triangle ACD' \equiv \triangle ACD$ であるから　$\angle ACD = 90^\circ$

点 H を辺 AC の中点とすると，中点連結定理により

$$BH//D'C,\quad BH = \frac{1}{2}D'C = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\cdot 2CE = CE$$

したがって　$CE = BH = r\sin\alpha,\quad AC = 2AH = 2r\cos\alpha$

$\cos\angle DAB = \cos(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ より　$2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{3}{5}$

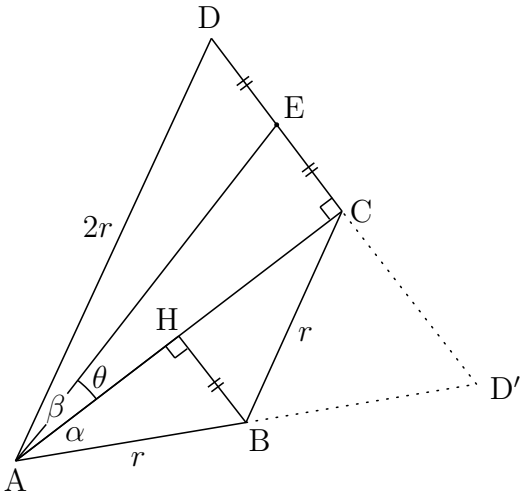
これを解いて　$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\quad \tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\theta = \angle CAE$ とすると

$$\tan\theta = \frac{CE}{AC} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ より

$$1 + 4^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$$




■

**3** (1) $i$ 回目に取り出したカードを $x_i$ とする $(1 \leqq i \leqq n)$．得点が $k$ であるとき

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-2} < x_{k-1} \geqq x_k \qquad (2 \leqq k \leqq n)$$

$j = x_{k-1}$ $(k-1 \leqq j \leqq n)$ とおくと ($j$ を固定して考える)

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-2}$$

を満たす組は ${}_{j-1}\mathrm{C}_{k-2}$ 通りあり，$j \geqq x_k$ を満たす $x_k$ は $j$ 通りあるから，求める確率 $p_k$ は

$$p_k = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{{}_{j-1}\mathrm{C}_{k-2} \cdot j}{n^k} = \frac{k-1}{n^k} \sum_{j=k-1}^{n} {}_j\mathrm{C}_{k-1}$$

ここで，非負整数 $l$, $m$ について

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{cases} {}_l\mathrm{C}_m & (l \geqq m) \\ 0 & (l < m) \end{cases}$$

とすると，次式が成立する．

$$\begin{pmatrix} l-1 \\ m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l-1 \\ m \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{k-1}{n^k} \sum_{j=k-1}^{n} \begin{pmatrix} j \\ k-1 \end{pmatrix} = \frac{k-1}{n^k} \sum_{j=k-1}^{n} \left\{ \begin{pmatrix} j+1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(k-1)_{n+1}\mathrm{C}_k}{n^k} \end{aligned}$$

上式は，$k = n+1$ のときも成立するから，求める確率は

$$\boldsymbol{p_k = \frac{(k-1)_{n+1}\mathrm{C}_k}{n^k} \qquad (2 \leqq k \leqq n+1)}$$

(2) (1) の結果から期待値 $f(n)$ は

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k p_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)_{n+1}\mathrm{C}_k}{n^k} = \frac{n+1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}}{n^{k-2}} \\ &= \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n+1}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boldsymbol{e}$ ■

**4** $C_1 : y = ax^2 + bx + c$

$C_1$ と $y = x^2 - x + \dfrac{3}{4}$ $(x > 0)$ の 2 式から $y$ を消去して整理すると

$$(1-a)x^2 - (b+1)x + \frac{3}{4} - c = 0 \quad \cdots ①$$

$C_1$ と $y = x^2 + 2x + \dfrac{3}{4}$ $(x \leqq 0)$ の 2 式から $y$ を消去して整理すると

$$(1-a)x^2 - (b-2)x + \frac{3}{4} - c = 0 \quad \cdots ②$$

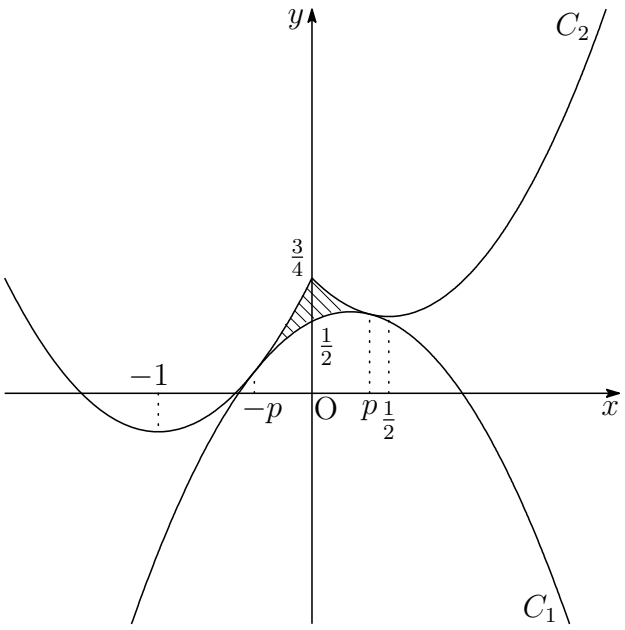
①，② の 2 次方程式は，ともに重解をもつから，係数について

$$(b+1)^2 - 4(1-a)\left(\frac{3}{4} - c\right) = 0,$$
$$(b-2)^2 - 4(1-a)\left(\frac{3}{4} - c\right) = 0$$

上の 2 式から　$(b+1)^2 = (b-2)^2$　これを解いて　$b = \dfrac{1}{2}$

したがって　方程式 ① の重解は　$x = \dfrac{b+1}{2(1-a)} = \dfrac{3}{4(1-a)}$

方程式 ② の重解は　$x = \dfrac{b-2}{2(1-a)} = -\dfrac{3}{4(1-a)}$



$p=\dfrac{3}{4(1-a)}$ とおくと

$$x^2-x+\frac{3}{4}-(ax^2+bx+c)=(1-a)(x-p)^2$$
$$x^2+2x+\frac{3}{4}-(ax^2+bx+c)=(1-a)(x+p)^2$$

求める面積を $S$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{S}{1-a}&=\int_{-p}^{0}(x+p)^2\,dx+\int_{0}^{p}(x-p)^2\,dx\\&=\frac{1}{3}\Big[\,(x+p)^3\,\Big]_{-p}^{0}+\frac{1}{3}\Big[\,(x-p)^3\,\Big]_{0}^{p}=\frac{2}{3}p^3\end{aligned}$$

よって　　$S=\dfrac{2}{3}(1-a)p^3=\dfrac{2}{3}(1-a)\left\{\dfrac{3}{4(1-a)}\right\}^3=\boldsymbol{\dfrac{9}{32(1-a)^2}}$ ■

**5**　(1)　$C=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ を

$$C\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

に代入すると

$$\begin{pmatrix}ay+bz&ax+bu\\au+bx&az+by\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+bu&ay+bz\\au+bx&az+by\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&z\end{pmatrix}$$

$a^2-b^2\neq0$ であるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x&y\\u&z\end{pmatrix}&=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix}a&-b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$C=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$

(2) $F=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とおくと　$F^2=E$

与えられた漸化式から

$$aA_{n+1}F+bFA_n=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\cdots②$$

①，② から　　$a(A_{n+1}-C)F+bF(A_n-C)=O$

$a\neq0$ であるから　$A_{n+1}-C=-\dfrac{b}{a}F(A_n-C)F$

$r=\dfrac{b}{a}$ とおくと　$A_{n+1}-C=-r(A_n-C)\quad\cdots(*)$

$$A_1-C=\begin{pmatrix}0&a^{-1}\\0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}0&-r\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}A_2-C&=-rF(A_1-C)F\\&=-\frac{r}{a-b}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-r\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\frac{r}{a-b}\begin{pmatrix}0&-1\\r&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(i) $n$ が奇数のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned}A_n-C&=(-r)^{n-1}F^{n-1}(A_1-C)F^{n-1}\\&=r^{n-1}(A_1-C)\\A^n&=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a-b}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1-r^n}\\\boldsymbol{r^{n-1}-1}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{r=\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

(ii) $n$ が偶数のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned}A_n-C&=(-r)^{n-2}F^{n-2}(A_2-C)F^{n-2}\\&=r^{n-2}(A_2-C)\\A^n&=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a-b}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1-r^{n-1}}\\\boldsymbol{r^n-1}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{r=\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

(3) $A_n$ が収束するのは　$\left|\dfrac{b}{a}\right|<1$　すなわち　$\boldsymbol{|b|<|a|}$ ■

**6** (1) $f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}=\dfrac{2\cos^2 x-3}{a\cos x+1}$

$t=\cos x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ とすると　$-1\leqq t\leqq 1$

$g(t)=\dfrac{2t^2-3}{at+1}$ とおくと，$f(x)=g(t)$ より

$$f'(x)=-g'(t)\sin x$$

$f'(x)<0$ のとき，$g'(t)>0$ より，$-1\leqq t\leqq 1$ において，$g(t)$ は増加関数

$$g'(t)=\frac{4t(at+1)-(2t^2-3)\cdot a}{(at+1)^2}=\frac{2at^2+4t+3a}{(at+1)^2}$$

$2at^2+4t+3a=2a\left(t+\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{2}{a}+3a$ より $(0<a<1)$

$g'(-1)\geqq 0$ を満たせばよいから

$$5a-4\geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{4}{5}\leqq a<1}$$

(2) (i) $\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ のとき，$f(x)$ は減少関数であるから，最大値は $f(0)$

(ii) $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき，$f'(x)=0$ の唯一の解を $\alpha$ とすると

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 極小 | ↗ | |

$$f(0)-f(\pi)=\frac{-1}{1+a}-\frac{-1}{1-a}=\frac{2a}{(1+a)(1-a)}>0$$

したがって　最大値は $f(0)$

(i)，(ii) より，$0\leqq x\leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値は　$f(0)$ ■