平成16年度　東北大学２次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理，医(医・保健(放射線・検査))，歯，薬，工，農)

- 理・工学部は，$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B・C (150分)
- 医[医，保健(放射線技術・検査技術)学科]・歯・薬・農学部は，$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{2}$$

を満たすとする．

(1) k, l を整数とする．$|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ．

(2) $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = 0$ となる整数の組 $(k,\ l)$ をすべて求めよ．

(3) 整数の組 $(k,\ l)$ を条件 $(k,\ l) \neq (0,\ 0)$ のもとで動かすとき，$|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ の最小値を与える $(k,\ l)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上の3つの曲線 C_1, C_2, C_3 を次で定める．

$$C_1 : \begin{cases} x = \dfrac{15}{2}t^4 \\ y = -3t^5 + 5t^3 \end{cases} \qquad \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \dfrac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\right) \\ y = \dfrac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\right) \end{cases} \qquad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{125(t-2)}{6\left(\dfrac{7}{4} - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)} \end{cases} \qquad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leqq t \leqq 2\right)$$

(1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) 原点Oを出発し，C_1, C_2, C_3 を順にたどってOに戻る行程の道のりを求めよ．

3 n を自然数とする．$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，$\cdots$，x_n と等比数列 y_0，y_1，$\cdots$，y_n が

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 2$$
$$1 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 2$$

を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める．

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$
$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ．

4 手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す．ここで

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$
$$p_1 = p_6,\ p_2 = p_5,\ p_3 = p_4$$

がなりたつとする．このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す．

(1) $Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ．

(2) $p_3 = \dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする．$Q(7)$ が取り得る最大の値は何か．また，そのときの p_1，p_2 を求めよ．

5 z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2) $z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3) n を自然数とする．$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

6 2次正方行列 A，B を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 積 AA，BB，AB，BA を計算せよ．

(2) 集合 $\{A,\ B\}$ から重複を許していくつか取り出し，いろいろな順番に並べて積を計算する．このようにして得られる行列をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|\vec{a}|^2=1$，$|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$ より　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}|k\vec{a}+l\vec{b}|^2&=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=k^2+kl+\frac{1}{2}l^2 \qquad (*)\\&=k(k+l)+\frac{1}{2}l^2\end{aligned}$$

k，$k+l$ は整数であるから，上式が整数であるとき，$\dfrac{1}{2}l^2$ は整数
よって　l は偶数である．

(2) $(*)$ より　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=\left(k+\dfrac{l}{2}\right)^2+\dfrac{l^2}{4}=0$

$$k+\frac{l}{2}=0,\quad \frac{l}{2}=0\quad よって\quad \boldsymbol{(k,\ l)=(0,\ 0)}$$

(3) (i) $k=0$ のとき，$l\neq 0$ より

$$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=\frac{1}{2}l^2\geqq\frac{1}{2}\quad 等号は\quad l=\pm 1$$

(ii) $k\neq 0$ のとき

$$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=\frac{1}{2}(k+l)^2+\frac{1}{2}k^2\geqq\frac{1}{2}\quad 等号は\quad k=\pm 1,\ k+l=0$$

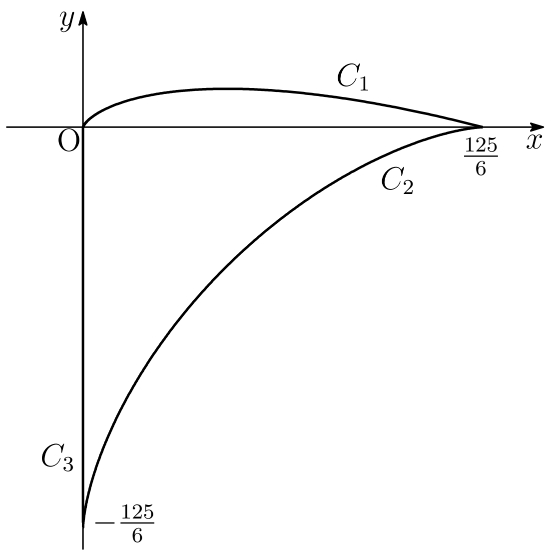
(i),(ii) より，以下のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

$$\boldsymbol{(k,\ l)=(0,\ 1),(0,-1),(1,-1),\ (-1,\ 1)}$$

■

2 (1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を S とする．

$$S = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^5+5t^3)\cdot 30t^3\,dt$$
$$= 30\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^8+5t^6)\,dt$$
$$= 30\left[-\frac{t^9}{3}+\frac{5}{7}t^7\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \boldsymbol{\frac{12500}{567}\sqrt{\frac{5}{3}}}$$



(2) C_1 の弧長を l_1 とすると

$$l_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \sqrt{(30t^3)^2+(-15t^4+15t^2)^2}\,dt$$
$$= 15\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} t^2(t^2+1)\,dt$$
$$= 15\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

C_2 について，

$$a = \frac{125}{6}, \quad \theta = 2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right), \quad \sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}$$

とおくと

$$C_2 : x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0\right)$$

C_2 の弧長を l_2 とすると

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta \\ &= 3a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\sin\theta\cos\theta|\,d\theta = 3a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= 3a\left[-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}\cdot\frac{125}{6} = \frac{125}{4} \end{aligned}$$

C_3 の弧長を l_3 とすると　$l_3 = \dfrac{125}{6}$

よって，求める弧長は

$$l_1+l_2+l_3 = \frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{125}{4}+\frac{125}{6} = \boldsymbol{\frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{625}{12}}$$

■

$\boxed{3}$ $P(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\,dx=\left[\,x+\frac{x^2}{2}\,\right]_0^1=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

$\log Q(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log Q(n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx\\&=\Big[\,(1+x)\log(1+x)-x\,\Big]_0^1=\log\frac{4}{e}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)=\boldsymbol{\frac{4}{e}}$

$\{y_n\}$ は初項 1，公比 $2^{\frac{1}{n}}$ の等比数列であるから　$y_k=2^{\frac{k}{n}}$

$R(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$ より

$$\lim_{n\to\infty}R(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\,dx=\left[\,\frac{2^x}{\log 2}\,\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{\log 2}}$$

$\log S(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{n}}=(\log 2)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log S(n)&=\lim_{n\to\infty}(\log 2)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\\&=(\log 2)\int_0^1 x\,dx=(\log 2)\left[\,\frac{x^2}{2}\,\right]_0^1=\log\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $p_1=p_6,\ p_2=p_5,\ p_3=p_4$，$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ より

$$p_1+p_2+p_3=p_4+p_5+p_6=\frac{1}{2}$$

サイコロを 3 回振って出た目の総和が 5 となるサイコロの目の出方は

$$\{1,\ 1,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 2\}$$

であるから，$p_3=\dfrac{1}{2}-p_1-p_2$ より

$$\begin{aligned}Q(5)&=\frac{3!}{2!1!}{p_1}^2p_3+\frac{3!}{1!2!}p_1{p_2}^2=3p_1(p_1p_3+{p_2}^2)\\&=3p_1\left\{p_1\left(\frac{1}{2}-p_1-p_2\right)+{p_2}^2\right\}\\&=\boldsymbol{3p_1\left(\frac{p_1}{2}-{p_1}^2-p_1p_2+{p_2}^2\right)}\end{aligned}$$

(2) サイコロを 3 回振って出た目の総和が 7 となるサイコロの目の出方は

$$\{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

であるから，$p_3=p_4=\dfrac{1}{6},\ p_5=p_2,\ p_1+p_2+p_3=\dfrac{1}{2}$ により

$$p_2=p_5=\frac{1}{3}-p_1,\quad p_3=p_4=\frac{1}{6},\quad p_6=p_1$$

$$\begin{aligned}Q(5)&=\frac{3!}{2!1!}{p_1}^2p_5+3!\cdot p_1p_2p_4+\frac{3!}{1!2!}p_1{p_3}^2+\frac{3!}{2!1!}{p_2}^2p_3\\&=3{p_1}^2\left(\frac{1}{3}-p_1\right)+6p_1\left(\frac{1}{3}-p_1\right)\cdot\frac{1}{6}+3p_1\left(\frac{1}{6}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}-p_1\right)^2\cdot\frac{1}{6}\\&=-3{p_1}^3+\frac{1}{2}{p_1}^2+\frac{1}{12}p_1+\frac{1}{18}\end{aligned}$$

$x=p_1$ とすると，$p_2=\dfrac{1}{3}-x\geqq 0$ であるから　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$

$f(x)=-3x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{18}\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}\right)$ とおくと

$$f'(x)=-9x^2+x+\frac{1}{12}=-\frac{1}{12}(18x+1)(6x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{72}$	$\searrow$	

$x=\dfrac{1}{6}$　すなわち　$\boldsymbol{p_1=p_2=\dfrac{1}{6}}$ のとき，$Q(7)$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{72}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{Re}(z^3 - z) = 0$ より $\quad \dfrac{(z^3 - z) + (\overline{z}^3 - \overline{z})}{2} = 0$

$$(z + \overline{z})(z^2 - z\overline{z} + \overline{z}^2 - 1) = 0$$

したがって　$(z + \overline{z})\{(z + \overline{z})^2 - 4\} = 0$

ゆえに　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} = 0,\ \pm 1$

$|z| = 1$ であるから　$\boldsymbol{z = i, -i,\ 1, -1}$

(2) $|z^5 + z| = |z||z^4 + 1| = 1$，$|z| = 1$ より　$|z^4 + 1| = 1$

点 z^4 と点 -1 の距離が 1 であるから ($|z| = 1$)

$$z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},\ \ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{z = \cos\theta + i\sin\theta}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3)}$$

(3) 点 z^n と点 -1 の距離が 1 であるから ($|z| = 1$)

$$z^n = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},\ \ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{z = \cos\theta + i\sin\theta}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3n} + \frac{k\pi}{2n},\ \frac{4\pi}{3n} + \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, \cdots, n - 1)}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ より $AA=BB=E$

$$AB=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$ABA=BAB=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$ABA=BAB$ より

$$ABAB=A(BAB)=A(ABA)=AABA=BA,$$
$$BABA=B(ABA)=B(BAB)=BBAB=AB$$

よって，求める行列は次の 6 種類である．

$$E,\ A,\ B,\ AB,\ BA,\ ABA(=BAB)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

■