

平成15年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

- 理・工学部は, 1 2 3 4 5 6 数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C (150分)
- 医[医, 保健(放射線技術・検査技術)学科]・歯・薬・農学部は, 1 2 3 4 数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C (100分)

1 実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ のとき, $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ を示せ.
- (2) A が $A^4 = E$ を満たすならば, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$ となることを示せ.
- (3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. A が $A^2 = -E$ および $BA = -AB$ を満たすとき, b, c, d を a の式で表せ. また, このとき

$$AB = A^m B A^n$$

が成立するような整数の組 (m, n) で $1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 3$ の範囲にあるものをすべて求めよ.

2 2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta,$$

$$y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする.

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ.
- (2) y を t の関数で表せ.
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ.

- 3** 関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える．ただし、 c は $0 < c < 2$ を満たす定数である．

- (1) $a_n < 2$, $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ．
- (2) $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ．
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．

- 4** xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える． u が 0 から 1 まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を S とする．

- (1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ．
- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

- 5** 複素数平面上で、相異なる 3 点 $1, \alpha, \alpha^2$ は実軸上に中心をもつ同一円周上にある．このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．さらに、この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ．

- 6** 対数は自然対数であり、 e はその底とする．関数 $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x}$ に対して、次の問いに答えよ．

- (1) $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数であることを示せ．
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ．
- (3) $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在することを示せ．

解答例

1 (1) $\alpha\delta - \beta\gamma = \det A^2 = (\det A)^2 \geq 0$

(2) $X = A^2$ とおくと, (1) の結果から $\det X \geq 0$

$A^4 = E$ より $(\det X^2)^2 = \det E = 1$ ゆえに $\det X = 1$

$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とすると, ハミルトン・ケリーの定理により

$$X^2 - (\alpha + \delta)X + E = O$$

$X^2 = E$ より $(\alpha + \delta)X = 2E$

X は E のスカラー倍で, $X^2 = E$ より $X = \pm E$

(3) $AB + BA = \begin{pmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $c = -b, d = -a$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ とおくと $A^2 = (a^2 - b^2)E$

$A^2 = -E$ より $a^2 - b^2 = -1$

よって $b = \pm\sqrt{a^2 + 1}, c = \mp\sqrt{a^2 + 1}, d = -a$ (複号同順)

$A^m B A^n$ ($1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 3$) は, $BA = -AB, A^2 = -E$ により

$$ABA = A(-AB) = -AAB = B$$

$$ABA^2 = (ABA)A = BA = -AB$$

$$ABA^3 = (ABA)A^2 = B(-E) = -B$$

$$A^2BA = A(ABA) = AB$$

$$A^2BA^2 = (A^2BA)A = ABA = B$$

$$A^2BA^3 = (A^2BA)A^2 = B(-E) = -B$$

$$A^3BA = A^2(ABA) = -EB = -B$$

$$A^3BA^2 = (A^3BA)A = -BA = AB$$

$$A^3BA^3 = (A^3BA)A^2 = -B(-E) = B$$

$AB = A^m B A^n$ を満たす (m, n) の組は ($1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 3$)

$$(m, n) = (2, 1), (3, 2)$$



2 (1) $t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right), \quad \cos 3\theta = -\cos 3 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{3} \text{ とおくと } \cos \alpha = \frac{t}{2}, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= -\cos 3\alpha = -4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha \\ &= -4 \left(\frac{t}{2} \right)^3 + 3 \cdot \frac{t}{2} = -\frac{1}{2} t^3 + \frac{3}{2} t \end{aligned}$$

(2) $\alpha = \theta - \frac{\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned} \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta &= -2 \left(\cos 2\theta \cos \frac{2\pi}{3} + \sin 2\theta \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -2 \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = -2 \cos 2\alpha \\ &= -2(2 \cos^2 \alpha - 1) = -2 \left(\frac{t^2}{2} - 1 \right) \\ &= -t^2 + 2 \end{aligned}$$

$$y = -4 \cos 3\theta + (\cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta) + 2(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y &= -4 \left(-\frac{1}{2} t^3 + \frac{3}{2} t \right) + (-t^2 + 2) + 2t \\ &= \mathbf{2t^3 - t^2 - 4t + 2} \end{aligned}$$

別解 $\alpha = \theta - \frac{\pi}{3}$ より, $\theta = \alpha + \frac{\pi}{3}, \quad t = 2 \cos \alpha$ より

$$\begin{aligned} y &= -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \\ &= -4 \cos 3 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \\ &\quad + 2 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 4 \cos 3\alpha - 2 \cos 2\alpha + 4 \cos \alpha \\ &= 4(4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) - 2(2 \cos^2 \alpha - 1) + 4 \cos \alpha \\ &= 16 \cos^3 \alpha - 4 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 2 \\ &= 16 \left(\frac{t}{2} \right)^3 - 4 \left(\frac{t}{2} \right)^2 - 8 \cdot \frac{t}{2} + 2 \\ &= \mathbf{2t^3 - t^2 - 4t + 2} \end{aligned}$$

- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$, $t = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$, $f(t) = 2t^3 - t^2 - 4t + 2$ とおく
 $-1 \leq t \leq 2$, $f'(t) = 6t^2 - 2t - 4 = 2(t-1)(3t+2)$

t	-1	$\dots$	$-\frac{2}{3}$	$\dots$	1	$\dots$	2
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{98}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

よって $t = 2$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 6
 $t = 1$ すなわち $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}$ のとき 最小値 -1

- 3 (1) $f(x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$ より

$$0 < x < 2 \text{ のとき } 0 < f(x) < 4$$

$$\text{したがって } 0 < x < 2 \text{ のとき } 0 < \sqrt{f(x)} < 2$$

$$0 < a_n < 2 \text{ のとき } 0 < \sqrt{f(a_n)} < 2 \text{ すなわち } 0 < a_{n+1} < 2$$

$$a_1 = c \text{ (} 0 < c < 2 \text{) より}$$

$$\text{すべての自然数 } n \text{ について } 0 < a_n < 2$$

$$0 < x < 2 \text{ のとき}$$

$$f(x) - x^2 = (4x - x^2) - x^2 = 2x(2 - x) > 0$$

$$\text{したがって } 0 < x < 2 \text{ のとき } x < \sqrt{f(x)} \text{ よって } a_n < a_{n+1}$$

- (2) $0 < c < 2$, $0 < x < 2$ のとき, $0 < \sqrt{f(x)} < 2$ より

$$2 - \sqrt{f(x)} = \frac{4 - f(x)}{2 + \sqrt{f(x)}} = \frac{4 - (4x - x^2)}{2 + \sqrt{f(x)}} = \frac{(2 - x)^2}{2 + \sqrt{f(x)}}$$

- (1) の結果から, $c < a_n < a_{n+1} < 2$ であるから

$$2 - a_{n+1} = \frac{(2 - a_n)^2}{2 + a_{n+1}} < \frac{(2 - a_n)}{2} (2 - a_n) < \frac{2 - c}{2} (2 - a_n)$$

- (3) (2) の結果から $0 < 2 - a_n < \left(\frac{2 - c}{2} \right)^{n-1} (2 - a_1)$

$$0 < \frac{2 - c}{2} < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - c}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - a_n) = 0 \text{ よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

- 4 (1) 2点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を通る直線 PQ の方程式は

$$\sqrt{1-u^2}y + uz = u\sqrt{1-u^2}, \quad x = u$$

点 $(u, 0, 0)$ から直線 PQ の距離を d とすると $(0 \leq u \leq 1)$

$$d = \frac{|u\sqrt{1-u^2}|}{\sqrt{(1-u^2)+u^2}} = u\sqrt{1-u^2}$$

- (2) $(u, 0, 0)$ を R とすると

$$RP^2 = u^2, \quad RQ^2 = 1 - u^2$$

$$0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } RQ^2 \geq RP^2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1 \text{ のとき } RQ^2 \leq RP^2$$

よって, 求める体積を V とすると, $d^2 = u^2(1-u^2)$ より

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-u^2) du + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^2 du - \int_0^1 u^2(1-u^2) du \\ &= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 - \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \left(\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \pi$$



5 実軸上にある中心を c とすると、条件から

$$|1 - c| = |\alpha - c| = |\alpha^2 - c|$$

$$\text{したがって } (1 - c)^2 = (\alpha - c)(\bar{\alpha} - c) = (\alpha^2 - c)(\bar{\alpha}^2 - c)$$

$$1 - 2c + c^2 = |\alpha|^2 - c(\alpha + \bar{\alpha}) + c^2 = |\alpha|^4 - c(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + c^2$$

第1式と第2式および第1式と第3式で整理すると、それぞれ

$$(\alpha + \bar{\alpha} - 2)c = |\alpha|^2 - 1, \quad (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2)c = (|\alpha|^2 + 1)(|\alpha|^2 - 1) \quad (*)$$

(i) $c = 0$ のとき, $(*)$ より $|\alpha| = 1$ (ただし, $\alpha \neq \pm 1$)

半径を r とすると $r = |1 - c| = 1$

(ii) $c \neq 0$ のとき, $(*)$ の2式から c を消去すると

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2 &= (|\alpha|^2 + 1)(\alpha + \bar{\alpha} - 2) \\ &= (\alpha\bar{\alpha} + 1)(\alpha + \bar{\alpha} - 2) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2 &= \alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) - 2\alpha\bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha} - 2 \\ (\alpha + \bar{\alpha})^2 &= (\alpha\bar{\alpha} + 1)(\alpha + \bar{\alpha}) \\ (\alpha + \bar{\alpha})(\alpha\bar{\alpha} - \alpha - \bar{\alpha} + 1) &= 0 \\ (\alpha + \bar{\alpha})|\alpha - 1|^2 &= 0 \end{aligned}$$

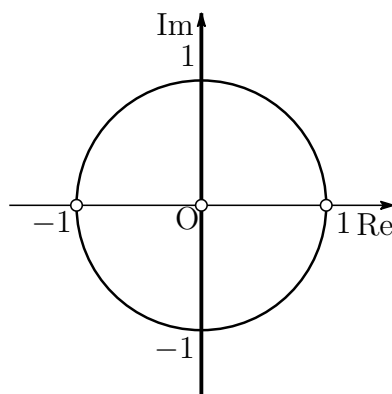
$\alpha \neq 1$ より, $|\alpha - 1| \neq 0$ であるから $\text{Re}(\alpha) = 0$ (ただし, $\alpha \neq 0$)

$\alpha + \bar{\alpha} = 0$ を $(*)$ の第1式に代入して $c = \frac{1 - |\alpha|^2}{2}$

半径 r は $r = |1 - c| = \left| 1 - \frac{1 - |\alpha|^2}{2} \right| = \frac{1 + |\alpha|^2}{2}$

(i), (ii) より, α の存在する範囲は, 下の図の太線部分. ただし, $\circ$ は含まない.

また, 半径は, (i), (ii) を合わせて $\frac{1 + |\alpha|^2}{2}$



6 (1) $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \log(x+1) - x \log x - \log x$ より

$$f'(x) = \log(x+1) + 1 - \log x - 1 - \frac{1}{x} = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

$f'(x)$ は単調増加であり

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

したがって $f'(x) < 0$ より、 $f(x)$ は減少関数である。

別解 $f'(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}$

$g(x) = \log(1+x) - x$ とすると $g(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

$x > 0$ において、 $g'(x) < 0$ より、 $x > 0$ において $g(x) < 0$

したがって $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

よって、 $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数である。

(2) $f(x) = (x+1) \log(x+1) - (x+1) \log x$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log(x+1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log x = -\infty$$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$

$$f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \log e + \log 1 = 1$$

(3) $x > 0$ において、 $f(x) = (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ は単調減少であり

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^2} + 1\right) \log(1 + e^2) > \log e^2 = 2$$

$$f(1) = 2 \log 2 < 2 \log e < 2$$

よって、 $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在する。 ■