平成 14 年度　東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理，医 (医・保健 (放射線・検査))，歯，薬，工，農)

- 理・工学部は，[1] [2] [3] [4] [5] [6] 数 I・II・III・A・B・C (150 分)
- 医 [医，保健 (放射線技術・検査技術) 学科]・歯・薬・農学部は，[1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (100 分)

1 a，b は実数であり，方程式

$$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$$

が解 $x=1+i$ をもつとする．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．このとき，a，b を求めよ．また，このときの方程式の他の解も求めよ．

2 xy 平面上に，媒介変数 t により表示された曲線

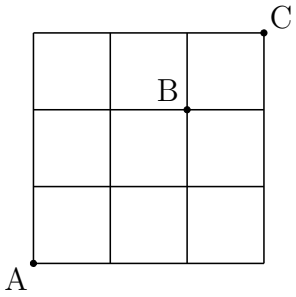
$$C:\ x=e^t-e^{-t},\quad y=e^{3t}+e^{-3t}$$

がある．

(1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形を描け．

(2) 曲線 C，x 軸，2 直線 $x=\pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

3



上の図のような格子状の道路がある．左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする．1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない．また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる．

n を 8 以上の自然数とする．A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

4 四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}} + n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$ が成り立つならば，$l = m = n$ であることを示せ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を l を用いて表せ．

(2) A，B，C，D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{PBQ}$ の値を求めよ．

5 $a > b > 0$ とし，xy 平面の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の第 1 象限の部分を E とする．ただし，第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない．E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし，$L = h - k$ とおく．点 P が E 上を動くとき，L の最小値が存在するための a と b についての条件と，そのときの L の最小値を求めよ．

6 $f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする．$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$ を次のように順次定義する．$n = 2,\ 3, \cdots$ に対し

$$F_{n-1}(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$$

とおいて

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，すべての x に対して $f_n(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，すべての $x \geqq 0$ に対して $f_n'(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(3) $f_4'(1) = 0$ のとき，すべての $0 \leqq x \leqq 1$ に対して $f_1(x) = 0$ であることを示せ．

解答例

1 実数を係数とする方程式が $x = 1+i$ を解にもつから

$$P(x) = x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3$$

とおくと，$P(x)$ は

$$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\} \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x + 2$$

を因数にもつ．

$$P(x) = (x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\} + (b-2a+1)x + a^3 - 8$$

したがって　$b-2a+1=0$，$a^3-8=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

$P(x) = (x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ より，$P(x)=0$ を解くと

$$x = 1 \pm i, \quad -3 \pm \sqrt{5}$$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{1-i,\ -3\pm\sqrt{5}}$ ■

2 (1) $C : x = e^t - e^{-t}$，$y = e^{3t} + e^{-3t}$ より

$$\begin{aligned} y &= (e^{2t} - 1 + e^{-2t})(e^t + e^{-t}) \\ &= \{(e^t - e^{-t})^2 + 1\}\sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + 4} \\ &= (x^2+1)\sqrt{x^2+4} \end{aligned}$$

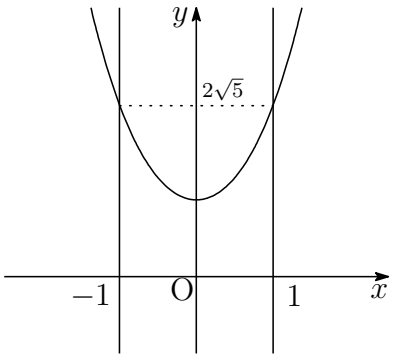
したがって

$$y' = 2x\sqrt{x^2+4} + (x^2+1)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{3(x^3+3x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \frac{y''}{3} &= \frac{(3x^2+3)\sqrt{x^2+4} - (x^3+3x)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} \\ &= \frac{(3x^2+3)(x^2+4) - (x^3+3x)x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^4+12x^2+12}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

x の関数 y の増減および凹凸は下のとおり．
また，曲線 C の概形は右の図のとおり．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	2	$\nearrow$



別解 $f(t)=e^t-e^{-t}$，$g(t)=e^{3t}+e^{-3t}$ とおくと [1]

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{3(e^{3t}-e^{-3t})}{e^t+e^{-t}}\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{g'(t)^3}\\ &=\frac{9(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})-3(e^{3t}-e^{-3t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3}\\ &=\frac{6(e^{4t}+e^{-4t})+12(e^{2t}+e^{-2t})}{(e^t+e^{-t})^3}>0\end{aligned}$$

$t>0$，すなわち，$x>0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}>0$

$t<0$，すなわち，$x<0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}<0$

$x<0$ で単調減少，$x>0$ で単調増加．C は下に凸．

(2) $x^3\sqrt{x^2+4}$，$x\sqrt{x^2+4}$ をそれぞれ微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3\sqrt{x^2+4})&=3x^2\sqrt{x^2+4}+\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4}}\\ &=(4x^2-4)\sqrt{x^2+4}+\frac{16}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \text{(A)}\\ \frac{d}{dx}(x\sqrt{x^2+4})&=\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\\ &=2\sqrt{x^2+4}-\frac{4}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \text{(B)}\end{aligned}$$

(A) $\times\dfrac{1}{4}$ + (B) より

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x^3}{4}+x\right)\sqrt{x^2+4}\right\}=(x^2+1)\sqrt{x^2+4}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1}(x^2+1)\sqrt{x^2+4}\,dx=2\int_{0}^{1}(x^2+1)\sqrt{x^2+4}\,dx\\ &=2\left[\left(\frac{x^3}{4}+x\right)\sqrt{x^2+4}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2017.pdf (p.5 を参照)

別解 $e^{\alpha}-e^{-\alpha}=1$ のとき

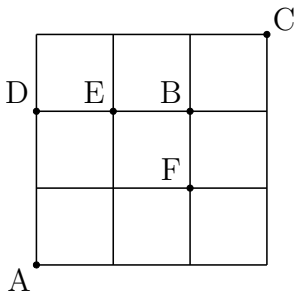
$$e^{\alpha}+e^{-\alpha}=\sqrt{(e^{\alpha}-e^{-\alpha})^2+4}=\sqrt{5}$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2}&=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\alpha} y\frac{dx}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{\alpha}(e^{3t}+e^{-3t})(e^{t}+e^{-t})\,dt\\
&=\int_0^{\alpha}(e^{4t}+e^{-4t}+e^{2t}+e^{-2t})\,dt\\
&=\left[\ \frac{1}{4}(e^{4t}-e^{-4t})+\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})\ \right]_0^{\alpha}\\
&=\frac{1}{4}(e^{4\alpha}-e^{-4\alpha})+\frac{1}{2}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})\\
&=\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})(e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}+2)\\
&=\frac{1}{4}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^3\\
&=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot(\sqrt{5})^3=\frac{5\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}}$ ■

3 ちょうど6回目でB地点に進むとき，5回終了時点でD，E，Fのいずれかの地点にある．



(i) 5回目終了時点で地点Dにあるとき，3が2回，不動が3回の確率であるから

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{288}$$

(ii) 5回目終了時点で地点Eにあるとき，2が1回，3が2回，不動が2回の確率であるから

$$\frac{5!}{1!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{30}{864}$$

(iii) 5回目終了時点で地点Fにあるとき，1が1回，3が1回，不動が3回の場合と2が2回，3が1回，不動が2回の場合の確率であるから

$$\frac{5!}{1!1!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{20}{288}+\frac{30}{864}$$

(i)〜(iii)より，ちょうど6回目で地点Bにある確率は

$$\left(\frac{10}{288}+\frac{30}{864}+\frac{20}{288}+\frac{30}{864}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{25}{864}$$

$n-6$回の試行で1，2が1回も出ない事象をX，3が1回も出ない事象をYとすると，$n-6$回の試行でB地点からC地点に進む確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\cap\overline{Y})&=P(\overline{X\cup Y})=1-P(X\cup Y)\\&=1-P(X)-P(Y)+P(X\cap Y)\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\end{aligned}$$

求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{25}{864}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}}$ ■

4 (1) 点 P から平面 BCD に垂線 PH を引くと，BP = CP = DP より

$$\triangle PBH \equiv \triangle PCH \equiv \triangle PDH$$

ゆえに　HB = HC = HD　すなわち，H は △BCD の重心

点 A から平面 BCD に引いた垂線を AH′ とすると，同様に

$$H'B = H'C = H'D$$

H と H′ が一致するので，P は垂線 AH 上の点である．

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$$

について，$\overrightarrow{AH} // \overrightarrow{AP}$ であるから　　$l = m = n$

したがって　$\overrightarrow{AP} = l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 3l\overrightarrow{AH}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{AC}$，$\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおくと　$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = 3l\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} \\ &= l(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \vec{b} = (l-1)\vec{b} + l\vec{c} + l\vec{d}\end{aligned}$$

このとき　$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$,　$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BP}|^2 &= (l-1)^2|\vec{b}|^2 + l^2|\vec{c}|^2 + l^2|d|^2 \\ &\qquad + 2(l-1)l\vec{b}\cdot\vec{c} + 2l^2\vec{c}\cdot\vec{d} + 2l(l-1)\vec{d}\cdot\vec{b} \\ &= (l-1)^2 + l^2 + l^2 + (l-1)l + l^2 + l(l-1) \\ &= 6l^2 - 4l + 1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{6l^2 - 4l + 1}}$

(2) P は平面 BCD に関して A と対称，Q は平面 ABC に関して D と対称であるから，△ABC の重心を G とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= 2\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ \overrightarrow{AQ} &= 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = 2\cdot\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{d} = \frac{1}{3}(2\vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{d}) \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = -\frac{5}{3}\vec{d}\end{aligned}$$

PB = BQ = 1，$PQ = \frac{5}{3}$ であるから，余弦定理により

$$\cos\angle PBQ = \frac{PB^2 + BQ^2 - PQ^2}{2PB\cdot BQ} = \frac{1 + 1 - \frac{25}{9}}{2} = \boldsymbol{-\frac{7}{18}}$$

■

5 $a > b > 0$，$E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (x > 0,\ y > 0)$

E 上の点 P を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とすると $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

E 上の点 P における接線は

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x + \frac{b\sin\theta}{b^2}y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1 \tag{1}$$

E 上の点 P における法線は，(1) と垂直であるから

$$\frac{\sin\theta}{b}(x - a\cos\theta) - \frac{\cos\theta}{a}(y - b\sin\theta) = 0 \tag{2}$$

$h,\ k$ は (1)，(2) にそれぞれ $x = 0$ を代入したときの y であるから

$$h = \frac{b}{\sin\theta}, \quad k = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin\theta$$

$L = h - k$ より　$L = \dfrac{b}{\sin\theta} + \dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin\theta$

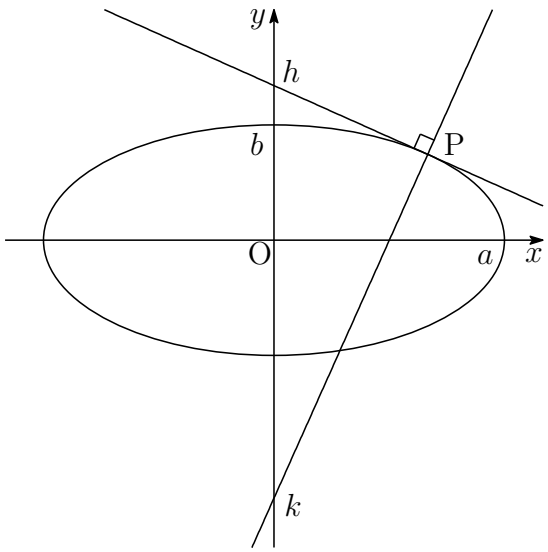
L が最小値をとるとき，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$L \geqq 2\sqrt{\frac{b}{\sin\theta}\cdot\frac{a^2 - b^2}{b}\sin\theta} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

上式において等号が成立するとき

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} < 1 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{2}b < a$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{2}b < a}$ を満たすとき 最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ をとる



■

6 (1) $(*)\ F_{n-1}(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ より　$(**)\ F'_{n-1}(x)=f_{n-1}(x)$

したがって，$F_{n-1}(0)=0$ に注意して

$$\begin{aligned} f_n(x)&=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt=\int_0^x F'_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt\\ &=\left[\ \frac{1}{2}F_{n-1}(t)^2\ \right]_0^x=\frac{1}{2}F_{n-1}(x)^2\geqq 0 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を $(*)$，$(**)$ に適用すると

$$n\geqq 3\ \text{のとき}\quad F_{n-1}(x)\geqq 0,\quad F'_{n-1}(x)\geqq 0\quad (x\geqq 0)\qquad \text{(A)}$$

このとき，(1) の結果を微分することにより

$$n\geqq 3\ \text{のとき}\quad f'_n(x)=F'_{n-1}(x)F_{n-1}(x)\geqq 0\quad (x\geqq 0)\qquad \text{(B)}$$

(3) (1) の結果および $(*)$ から　$F_n(x)\geqq 0\ (n\geqq 1)$

(A) から　$F'_n(x)\geqq 0\ (n\geqq 2)$

$f'_n(1)=0$ のとき $(2\leqq n\leqq 4)$，(B) より

$$F'_{n-1}(1)=0\quad \text{または}\quad F_{n-1}(1)=0$$

このとき

$$\begin{aligned} F_{n-1}(1)=0\quad &\Longrightarrow\quad F_{n-1}(x)=0\quad (0\leqq x\leqq 1)\\ &\Longrightarrow\quad F'_{n-1}(x)=0\quad (0\leqq x\leqq 1)\\ &\Longrightarrow\quad f_{n-1}(x)=0\quad (0\leqq x\leqq 1)\\ &\Longrightarrow\quad f'_{n-1}(x)=0\quad (0\leqq x\leqq 1)\\ &\Longrightarrow\quad f'_{n-1}(1)=0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'_4(1)=0\quad &\Longrightarrow\quad f'_3(1)=0\\ &\Longrightarrow\quad f'_2(1)=0\\ &\Longrightarrow\quad f_1(x)=0\quad (0\leqq x\leqq 1) \end{aligned}$$

■