

平成13年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

- 理・工学部は, 1 2 3 4 5 6 数I・II・III・A・B・C (150分)
- 医[医, 保健(放射線技術・検査技術)学科]・歯・薬・農学部は, 1 2 3 4 数I・II・III・A・B・C (100分)

1 a, b を正の数とする. 2つの曲線

$$y = x^3 + bx^2, \quad y = ax^2 + abx$$

によって囲まれる2つの部分の面積の和を S とする.

- (1) S を a と b で表せ.
- (2) $a + b = 1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ.

2 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ ($x \neq 0$) について,

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

とおく.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) $-\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で, 3つの関数

$$\sqrt{1+2x}, \quad 1+ax, \quad 1+ax+bx^2$$

の大小関係を調べ, これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け.

3 1から200までの整数が1つずつ記入された200枚のカードの入った箱がある. この箱から1枚のカードを無作為に抜き出して, それに書かれた数が奇数であればその数を得点とし, 偶数の場合は奇数になるまで2で割って得られる奇数を得点とする. 例えば, 抜き出したカードの数が28であれば, これを2で2回割って得られる7が得点となる. 1枚のカードを抜き出したときの得点の期待値を求めよ.

- 4 四面体 OABC において, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく. 線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ, L, M, N, P, Q, R とし, $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく.

- (1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ.
- (2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ.
- (3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする. X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とすると, 四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ.

- 5 複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (ただし, x, y, u, v は実数) は $|z| = |w| = 1$ を満たし, $yv < 0$ とする. $|1 + z + w| < 1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ.

- 6 (1) n を正の整数とする. $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

- (2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^3 + bx^2$, $g(x) = ax^2 + abx$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 + bx^2 - (ax^2 + abx) \\ &= x^2(x + b) - ax(x + b) \\ &= x(x + b)(x - a) \end{aligned}$$

$a > 0$, $b > 0$ より, $-b \leq 0 \leq a$ であるから

$-b \leq x \leq 0$ のとき $f(x) - g(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq a$ のとき $f(x) - g(x) \leq 0$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-b}^0 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^a \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_{-b}^0 \{x^3 + (b - a)x^2 - abx\} dx - \int_0^a \{x^3 + (b - a)x^2 - abx\} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}(b - a)x^3 - \frac{1}{2}abx^2 \right]_{-b}^0 - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}(b - a)x^3 - \frac{1}{2}abx^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{12}(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

(2) (*) $a + b = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) であるから

$$b = 1 - a > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 1$$

b は a の関数で, b を a で微分すると $b' = -1$

したがって, S を a で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= \frac{1}{12}(4a^3 + 6a^2b + 2a^3b' + 2b^3 + 6ab^2b' + 4b^3b') \\ &= \frac{1}{12}(4a^3 + 6a^2b - 2a^3 + 2b^3 - 6ab^2 - 4b^3) \\ &= \frac{1}{6}\{a^3 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2\} = \frac{1}{6}(a - b)\{(a^2 + ab + b^2) + 3ab\} \\ &= \frac{1}{6}(a - b)(1 + 2ab) = \frac{1}{6}(2a - 1)(1 + 2ab) \end{aligned}$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{1}{32}$	$\nearrow$	

(*) より $a = b = \frac{1}{2}$ のとき 最小値 $\frac{1}{32}$



2 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ ($x \neq 0$) より

$$f(x) = \frac{(1+2x)-1}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} \quad \text{よって} \quad a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{(\sqrt{1+2x}+1)^2} \quad \text{よって} \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

(2) $g(x) = \sqrt{1+2x}$ とおくと

$$g'(x) = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}, \quad g''(x) = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}, \quad g'''(x) = 3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 1$$

$C: y = g(x)$ 上の点 $(0, 1)$ における接線を C_1 とすると

$$C_1: y = 1 + x$$

$g''(x) < 0$ より, C は上に凸であるから

$$1 + x \geq \sqrt{1+2x} \quad (\text{等号は } x = 0 \text{ のとき})$$

$g(x)$ を $x = 0$ を極として展開すると

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \int_0^x g'(t) dt = g(0) + \int_0^x (t-x)' g'(t) dt \\ &= g(0) + \left[(t-x)g'(t) \right]_0^x - \int_0^x \left\{ \frac{1}{2}(t-x)^2 \right\}' g''(t) dt \\ &= g(0) + g'(0)x - \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 g''(t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)^2 g'''(t) dt \\ &= g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2} g''(0)x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)^2 g'''(t) dt \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)^2 g'''(t) dt \end{aligned} \quad (*)$$

$x \geq -\frac{1}{2}$ のとき, $g'''(x) \geq 0$ であるから $\left(\text{等号は } x = -\frac{1}{2} \text{ のとき} \right)$

$$\begin{aligned} x \geq 0 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)^2 g'''(t) dt \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)^2 g'''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_x^0 (t-x)^2 g'''(t) dt < 0 \end{aligned}$$

したがって, (*) より

$$\begin{aligned} x \geq 0 \text{ のとき} \quad & \sqrt{1+2x} \geq 1+x-\frac{1}{2}x^2 \quad (\text{等号は } x=0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ のとき} \quad & \sqrt{1+2x} < 1+x-\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

明らかに, 次式が成立する (等号は $x=0$ のとき).

$$1+x-\frac{1}{2}x^2 \leq 1+x$$

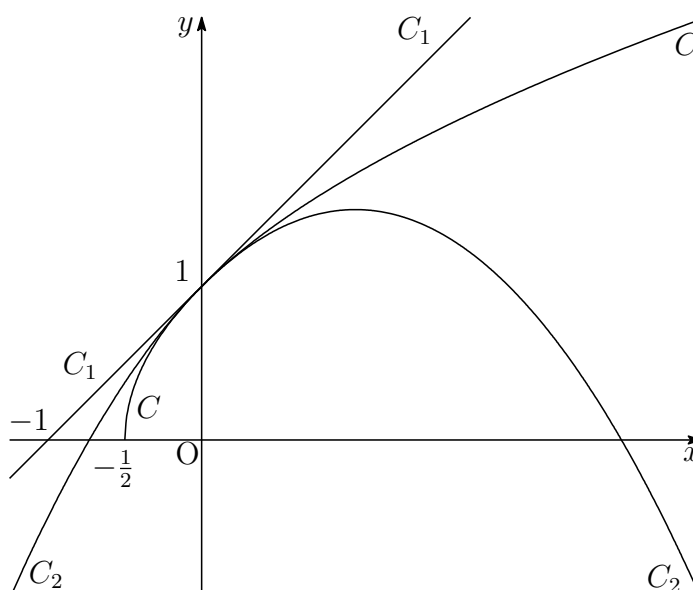
以上の結果から, 次式が成立する.

$$x \geq 0 \text{ のとき} \quad 1+x-\frac{1}{2}x^2 \leq \sqrt{1+2x} \leq 1+x$$

(等号は $x=0$ のとき)

$$x < 0 \text{ のとき} \quad \sqrt{1+2x} < 1+x-\frac{1}{2}x^2 < 1+x$$

$C: y = \sqrt{1+2x}$, $C_1: y = 1+x$, $C_2: y = 1+x-\frac{1}{2}x^2$ とすると, これらのグラフは次のようになる.



- 3** (i) 得点が1となるカードの数は 2^k ($0 \leq k \leq 7$)
(ii) 得点が3となるカードの数は $3 \cdot 2^k$ ($0 \leq k \leq 6$)
(iii) 得点が5となるカードの数は $5 \cdot 2^k$ ($0 \leq k \leq 5$)
(iv) 得点が $2j-1$ ($4 \leq j \leq 6$) となるカードの数は

$$(2j-1) \cdot 2^k \quad (0 \leq k \leq 4)$$

- (v) 得点が $2j-1$ ($7 \leq j \leq 13$) となるカードの数は

$$(2j-1) \cdot 2^k \quad (0 \leq k \leq 3)$$

- (vi) 得点が $2j-1$ ($14 \leq j \leq 25$) となるカードの数は

$$(2j-1) \cdot 2^k \quad (0 \leq k \leq 2)$$

- (vii) 得点が $2j-1$ ($26 \leq j \leq 50$) となるカードの数は

$$(2j-1) \cdot 2^k \quad (0 \leq k \leq 1)$$

- (viii) 得点が $2j-1$ ($51 \leq j \leq 100$) となるカードの数は

$$2j-1$$

(i)~(viii) より, 得点の合計を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + (6^2 - 3^2) \cdot 5 + (13^2 - 6^2) \cdot 4 \\ &\quad + (25^2 - 13^2) \cdot 3 + (50^2 - 25^2) \cdot 2 + (100^2 - 50^2) \\ &= 59 - 3^2 \cdot 5 + 6^2 + 13^2 + 25^2 + 50^2 + 100^2 \\ &= 13344 \end{aligned}$$

よって, 求める期待値は

$$\frac{S}{200} = \frac{13344}{200} = \frac{1668}{25}$$



- 4 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ であるから, 条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \frac{1}{2}\vec{a}, & \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\vec{b}, & \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}\vec{c}, \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), & \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}), & \overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

LP, MQ, NR の中点の位置ベクトルは

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

よって, 線分 LP, MQ, NR はそれぞれの中点で交わる.

- (2) $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL} & \text{ゆえに} & & \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} & \text{ゆえに} & & \vec{q} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) \\ \overrightarrow{NR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{ON} & \text{ゆえに} & & \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})\end{aligned}$$

よって $\vec{a} = \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{r} + \vec{p}$, $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$

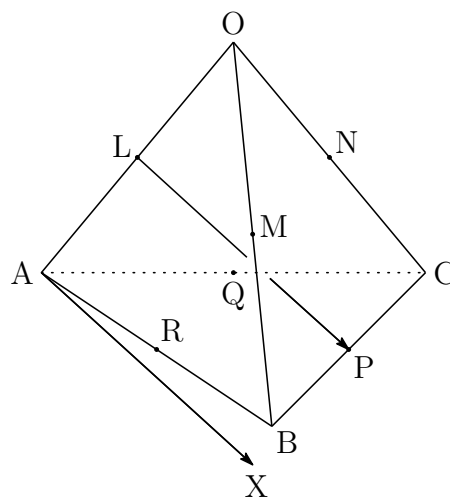
- (3) $\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{LP} = -\vec{p}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XB} &= \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{p} + \vec{b} - \vec{a} = -\vec{p} + (\vec{r} + \vec{p}) - (\vec{q} + \vec{r}) = -\vec{q} \\ \overrightarrow{XC} &= \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{p} + \vec{c} - \vec{a} = -\vec{p} + (\vec{p} + \vec{q}) - (\vec{q} + \vec{r}) = -\vec{r}\end{aligned}$$

$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ は互いに直交するから, 四面体 XABC の体積は $\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$

2 点 X, L から平面 ABC までの距離は等しい. また, L は OA の中点であるから, 四面体 OABC の体積は

$$2 \times \frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}| = \frac{1}{3}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$



5 (*) $|1 + z + w| < 1$ より

$$|1 + z + w|^2 < 1 \quad \text{ゆえに} \quad (1 + z + w)(1 + \bar{z} + \bar{w}) < 1$$

$|z| = |w| = 1$ に注意して、整理すると

$$\begin{aligned} 1 + (z + \bar{z}) + (w + \bar{w}) + |z|^2 + |w|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w) &< 1 \\ 3 + 2\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}(w) + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) &< 1 \end{aligned}$$

$z = x + yi, \quad w = u + vi$ より

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Re}(w) = u, \quad \operatorname{Re}(z\bar{w}) = xu + yv$$

であるから

$$3 + 2x + 2u + 2(xu + yv) < 1 \quad \text{ゆえに} \quad (1 + x)(1 + u) < -yv \quad (**)$$

$yv \neq 0$ であるから、 $|z| = |w| = 1$ より $|x| < 1, |u| < 1$

$1 + x > 0, 1 + u > 0, -yv > 0$ に注意して、(**) の両辺を平方すると

$$(1 + x)^2(1 + u)^2 < y^2v^2$$

$y^2 = 1 - x^2, \quad v^2 = 1 - u^2$ を代入すると ($|x| < 1, |u| < 1$)

$$\begin{aligned} (1 + x)^2(1 + u)^2 &< (1 - x^2)(1 - u^2) \\ (1 + x)(1 + u) &< (1 - x)(1 - u) \\ x + u &< 0 \end{aligned} \quad (***)$$

$|z| = |w| = 1, yv < 0$ のとき

$$(*) \iff (**) \iff (***)$$

よって $|1 + z + w| < 1 \iff x + u < 0$ ■

6 (1) (*) $f_n(t) = e^t - \frac{t^n}{n!} > 0 \quad (t \geq 0)$

[1] $n = 1$ のとき, $f_1(t) = e^t - t$ より

$$f_1'(t) = e^t - 1 \geq 0 \quad (t \geq 0), \quad f_1(0) = 1$$

したがって, (*) が成立する.

[2] $n = k$ のとき, (*) が成立すると仮定し

$$f_{k+1}(t) = e^t - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

を微分すると

$$f_{k+1}'(t) = f_k(t) > 0, \quad f_{k+1}(0) = 1 > 0$$

したがって, $n = k + 1$ のときも, (*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (*) が成立する.

(2) 部分積分法を繰り返すことにより

$$\begin{aligned} \int_0^t x^m e^{-x} dx &= - \left[e^{-x} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} \right]_0^t \\ &= -e^{-t} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} t^{m-k} + m! \end{aligned}$$

(1) の結果より, $t > 0$ のとき $e^t > \frac{t^m}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

$$0 < e^{-t} t^{m-k} < \frac{m!}{t^k} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{m-k} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

よって $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx = m!$

補足 次の積分公式を利用している¹.

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \dots \right\} + C$$

これに $p = -1, q = 0$ を代入すると

$$\int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} \{ f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots \} + C$$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-math-2015-kouki.pdf> (p.7)