

令和 7 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 原点を出発点として数直線上を動く点 P がある. 試行 (*) を次のように定める.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 枚の硬貨を 1 回投げて,} \\ \bullet \text{ 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める.} \\ \bullet \text{ 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ,} \\ \quad \text{奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め,} \\ \quad \text{偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める.} \end{array} \right.$$

ただし, 硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$, さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 試行 (*) を 3 回繰り返したとき, 点 P が原点にもどっている確率を求めよ.
- (2) 試行 (*) を 6 回繰り返したとき, 点 P が原点にもどっている確率を求めよ.
- (3) n を 3 で割り切れない正の整数とする. 試行 (*) を n 回繰り返したとき, 点 P が原点にもどっている確率を求めよ.

2 正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次のように定める.

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) k を実数とする. $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく. このとき, 数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ.

- 3 四面体 OABC において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする. 点 D は $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) 四面体 OABC の体積を V とするとき, 四角錐 OABDC の体積を V を用いて表せ.
 - (2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
 - (3) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
 - (4) 四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき, 線分 OD の長さを求めよ.
- 4 k を正の実数とする. 曲線 $y = x(x - 2)^2$ と放物線 $y = kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ.

解答例

- 1** 1回の試行(*)で点Pは数直線上を正の向きに1または負の向きに-2だけ進む. それぞれの事象を A, B とし, その確率を $p = P(A), q = P(B)$ とすると

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

- (1) 3回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = 3, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2, \quad y = 1$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{3!}{2!1!} p^2 q = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

- (2) 6回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = 6, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 4, \quad y = 2$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{6!}{4!2!} p^2 q = 15 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1215}{4096}$$

- (3) n 回の試行(*)で事象 A, B の起きる回数をそれぞれ x, y とすると

$$x + y = n, \quad x + (-2)y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2n}{3}, \quad y = \frac{n}{3}$$

n は3で割り切れない正の整数であるから, x, y が0以上の整数であることに反する. よって, 求める確率は **0** ■

- 2** (1) 正の実数からなる2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

を満たすから, $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおくと

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1, \quad a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 6b_n$$

k を実数とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= 5a_n + 2b_n + k(a_n + 6b_n) \\ &= (5+k)a_n + (2+6k)b_n \end{aligned} \quad (*)$$

したがって $1 : k = (5+k) : (2+6k)$

$$k(5+k) = 2+6k \quad \text{整理すると} \quad k^2 - k - 2 = 0$$

ゆえに $(k+1)(k-2) = 0$ これを解いて $k = -1, 2$

$k = -1, 2$ を $(*)$ にそれぞれ代入すると

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n), \quad a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n) \quad (**)$$

数列 $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n + 2b_n\}$ は公比がそれぞれ 4, 7 の等比数列である.

よって $k = -1, 2$

- (2) $(**)$ より

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= (a_1 - b_1) \cdot 4^{n-1} = \{1 - (-1)\} \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}, \\ a_n + 2b_n &= (a_1 + 2b_1) \cdot 7^{n-1} = \{1 + 2(-1)\} \cdot 7^{n-1} = -7^{n-1} \end{aligned}$$

上の2式から b_n を消去すると $a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$

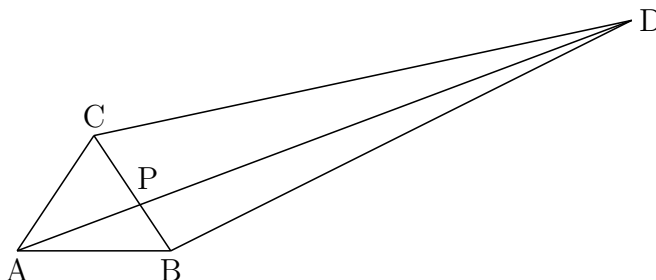
$$x_n = 2^{a_n} \text{ であるから } x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$$



3 (1) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{AD} = 5 \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5} \dots \textcircled{1}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、四角形 $ABDC$ の面積は $5S$

四面体 $OABC$ の体積が V のとき、四角錐 $OADBC$ の体積は $5V$



(2) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$$\overrightarrow{OD} = -4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{OD} = -4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$

(3) $\textcircled{1}$ より $\overrightarrow{AP} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}$

したがって $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})}{5}$

$$\overrightarrow{OP} - \vec{a} = \frac{3(\vec{b} - \vec{a}) + 2(\vec{c} - \vec{a})}{5} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$$

(4) このとき、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(2) の結果から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= |-4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= 16|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{c} - 16\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 16 + 9 + 4 - 24 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{2} = 15 \end{aligned}$$

よって $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{15}$



- 4 $f(x) = x(x-2)^2$, $g(x) = kx^2$ とおくと $f(x) - g(x) = x\{x^2 - (k+4)x + 4\}$
 ここで、2次方程式(*) $x^2 - (k+4)x + 4 = 0$ の係数について、 $k > 0$ より

$$D = (k+4)^2 - 4 \cdot 4 = k(k+8) > 0$$

2次方程式(*) は異なる2つの実数解をもち、それらを α, β とすると ($\alpha < \beta$),
 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = k + 4 > 0, \quad \alpha\beta = 4 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \alpha < \beta$$

したがって $f(x) - g(x) = x(x - \alpha)(x - \beta) \quad (0 < \alpha < \beta)$

$$\alpha = \frac{k+4 - \sqrt{k(k+8)}}{4}, \quad \beta = \frac{k+4 + \sqrt{k(k+8)}}{4}$$

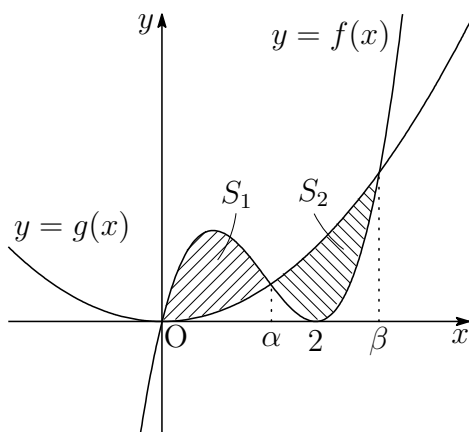
2区間 $0 \leq x \leq \alpha$, $\alpha \leq x \leq \beta$ において、2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた
 部分の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると

$$S_1 = \int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx, \quad S_2 = \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$S_1 = S_2 \text{ であるから } \int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx = \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$\int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx + \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \int_0^\beta \{f(x) - g(x)\} dx = 0 \quad (**)$$



(**) により

$$\begin{aligned}
 \int_0^\beta \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx \\
 &= \int_0^\beta x\{(x - \beta) + (\beta - \alpha)\}(x - \beta) dx \\
 &= \int_0^\beta x(\beta - x)^2 dx - (\beta - \alpha) \int_0^\beta x(\beta - x) dx \\
 &= \frac{1}{12}\beta^4 - (\beta - \alpha) \cdot \frac{1}{6}\beta^3 \\
 &= \frac{1}{12}\beta^3(2\alpha - \beta) = 0
 \end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ であるから, $\beta = 2\alpha$ より

$$\frac{k + 4 + \sqrt{k(k + 8)}}{4} = 2 \cdot \frac{k + 4 - \sqrt{k(k + 8)}}{4}$$

したがって $3\sqrt{k(k + 8)} = k + 4$

上式を平方して整理すると $k^2 + 8k - 2 = 0$

$k > 0$ に注意してこれを解くと $k = -4 + 3\sqrt{2}$

補足 次の積分公式を利用している¹.



積分公式

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf [1]